基礎数学演習 2

1　復習 (集合, 写像)

X を全体集合, $A, B, A_n \subset X$ $(n = 1, 2, \ldots)$ とする.

- $x \in X \overset{\text{def}}{\iff} x$ は X の元・要素.
- 「$\forall$」=「任意の」,「$\exists$」=「存在して」,「;」=「such that」=「(以下) を満たすような」.
- $A \subset B \overset{\text{def}}{\iff} x \in A \Longrightarrow x \in B$.
- $x \in A \cup B \overset{\text{def}}{\iff} x \in A$ or $x \in B$.
- $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \overset{\text{def}}{\iff} {}^{\exists}n \geq 1;\ x \in A_n$.
- $x \in A \cap B \overset{\text{def}}{\iff} x \in A$ and $x \in B$.
- $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \overset{\text{def}}{\iff} {}^{\forall}n \geq 1,\ x \in A_n$.
- $x \in A \setminus B \overset{\text{def}}{\iff} x \in A$ and $x \notin B$.
- $x \in A^c \overset{\text{def}}{\iff} x \notin A$.
- X の各元 x に対して, 集合 Y の元 y が一つずつ対応しているとき, その対応を $f : X \to Y,\ x \mapsto y = f(x)$ などと表し, **写像**という. また $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \subset Y$ を f の**値域**という.
- $f : X \to Y$ を写像とする. $A \subset X$, $B \subset Y$ に対し, $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ と $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ を, それぞれ f による A の**像**, **逆像**という. 特に, $f(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

$$\begin{array}{llcl} \text{像} & y \in f(A) & \overset{\text{def}}{\iff} & {}^{\exists}x \in A \text{ s.t. } y = f(X) \\ \text{逆像} & x \in f^{-1}(B) & \overset{\text{def}}{\iff} & f(x) \in B \end{array}$$

f を X から Y への写像とする.

- f が**単射** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 「$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$」 $\iff$ 「$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$」.
- f が**全射** $\overset{\text{def}}{\iff} {}^{\forall}y \in Y,\ {}^{\exists}x \in X$ s.t. $y = f(x)$.
- f が**全単射** $\overset{\text{def}}{\iff}$ f が全射かつ単射, つまり, ${}^{\forall}y \in Y$, ${}^{\exists_1}x \in X$ s.t. $y = f(x)$. ただし,「$\exists_1$」は「唯一つ存在する」という意味.
- $f : X \to X,\ f(x) = x$ を**恒等写像**といい, I_X, id_X や単に I, id と表す.
- 写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ に対して, 写像 $g \circ f : X \to Z,\ g \circ f(x) = g(f(x))$ を f と g の**合成写像**という.
- $f : X \to Y$ が全単射のとき, 任意の $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ となる唯一つの $x \in X$ を対応させる写像を $f : X \to Y$ の**逆写像**といい, $f^{-1} : Y \to X$ と表す.

2　同値関係, 同値類, 商集合

集合 X の元の間に「ある関係」を定義する．ただし, X のどの元 x と y に対しても, この関係が成り立つか否かが明確にわかるように定義する．このとき, 集合 X に**関係** R が導入されたといい, X の元 x, y がこの関係をみたすとき, xRy と書く.

定義 (同値関係)

集合 X における関係 R が次の三つの性質を満たすとき, 関係 R は**同値関係** (equivalence relation) であるという：

(i) (**反射律**) ${}^{\forall}x \in X,\ xRx.$

(ii) (**対称律**) $xRy \Longrightarrow yRx.$

(iii) (**推移律**) xRy かつ $yRz \Longrightarrow xRz.$

同値関係 R はしばしば $\sim$ と表され, xRy を $x \sim y$ と表す.

問 2.1. 以下の関係 $\sim$ が同値関係であるか否かを判定せよ.

(1) 実数の集合 $\mathbb{R}$ において, $x \sim y \overset{\text{def}}{\iff} x \leq y.$

(2) 実数の集合 $\mathbb{R}$ において, $x \sim y \overset{\text{def}}{\iff} x - y \in \mathbb{Z}.$

(3) 自然数の集合 $\mathbb{N}$ において, $x \sim y \overset{\text{def}}{\iff} x \mid y \overset{\text{i.e.}}{\iff} x$ は y の約数.

(4) 整数の集合 $\mathbb{Z}$ において, $x \sim y \overset{\text{def}}{\iff} x + 3y$ は偶数.

定義 (同値類, 商集合)

集合 X 上の同値関係 $\sim$ が与えられたとき, 各 $x \in X$ に対して X の部分集合

$$[x] := \{y \in X \mid x \sim y\}$$

を x の**同値類** (equivalence class) と呼ぶ．この $[x]$ に対し, 任意の元 $y \in [x]$ を同値類 $[x]$ の代表元と呼ぶ.

また, 同値類全体のなす集合を X の $\sim$ による**商集合** (quotient set) といい $X/{\sim}$ と表す.

問 2.2. 集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上に同値関係

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\iff} x + 3y \text{ は奇数}$$

が与えられているとする．このとき X の各元の同値類を求めよ.

問 2.3. 平面 $\mathbb{R}^2$ 上に同値関係

$$(x, y) \sim (x', y') \overset{\text{def}}{\iff} |x| + |y| = |x'| + |y'|$$

が与えられているとする．このとき, 点 $(1, 0)$ を代表元とする同値類を図示せよ.

問 2.4. X を集合, $\sim$ を X 上の同値関係とする．$x, y \in X$ とする．このとき次が成り立つことを示せ.

(1) $x \in [x]$,

(2) $x \sim y \iff [x] = [y]$,

(3) $[x] \cap [y] \neq \emptyset \Longrightarrow [x] = [y]$.

注意 2.1. 上の結果より, $X = \bigcup_{x \in X} [x]$ かつ $x, y \in X,\ [x] \neq [y] \Longrightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$ と, X を同値類で交わりなく分割することができる.

問 2.5. 直積集合[*1] $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ 上に関係 $\sim$ を

$$(m, a) \sim (n, b) \iff mb = na$$

で定める. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) 関係 $\sim$ は同値関係であることを示せ.

(2) $(2, 1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ を代表元とする同値類はどのような集合かを述べよ.

(3) $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ から $\mathbb{Q}$ への写像 f を

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \ni (m, a) \mapsto \frac{a}{m} \in \mathbb{Q}$$

と定めるとき, f は全単射か否かを判定せよ.

(4) $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ の $\sim$ による商集合 $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}/\!\sim$ から $\mathbb{Q}$ への写像 g を

$$g : \mathbb{N} \times \mathbb{Z}/\!\sim\ \ni [m, a] \mapsto \frac{a}{m} \in \mathbb{Q}$$

と定めるとき, g は矛盾なく定義される (well-defined である) ことを示し, g は全単射であることを示せ.

3 同値関係, 同値類, 商集合 2

問 3.1. 0 以上 99 以下の整数の集合を X とし, X 上の同値関係 $\sim$ を次で定める：

$$x \sim y \iff x \text{ と } y \text{ は一の位が等しい.}$$

このとき, 同値類 $[26]$ は何か. また商集合 $X/\!\sim$ は何か.

問 3.2. $n \in \mathbb{N}$ とする. $x, y \in \mathbb{Z}$ に対して, $x - y$ が n の倍数であるとき, x と y は n を法として合同であるといい,

$$x \equiv y \pmod{n}$$

と表す. この「n を法として合同である」という関係が同値関係であることを示せ.

[*1] 2 つの元 a と b に対して, (どちらが前であるかの順序まで考えた) 対 (a, b) を a と b の**順序対**(ordered pair) とよぶ. すなわち, $a \neq b$ のとき, $(a, b) \neq (b, a)$ である. 順序対 (a, b) と (a', b') が等しいことを, $a = a'$ かつ $b = b'$ で定め, $(a, b) = (a', b')$ と書く.

集合 A, B に対し, A の元と B の元の順序対全体の集合を集合 A, B の**直積**(direct product) または**直積集合**(Cartesian product) と呼び, $A \times B$ と表す.

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

問 3.3. 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ 上に同値関係

$$x \sim y \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad x \equiv y \pmod 5$$

が与えられているとする．このとき, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} := \mathbb{Z}/\!\sim$ を求めよ．

注意 3.1. 一般に, 2 以上の $n \in \mathbb{N}$ を法として合同である同値関係による $\mathbb{Z}$ の商集合は $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と表される．$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の元の個数は n 個である．

問 3.4. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に二項演算"$+$" を

$$[x] + [y] := [x + y]$$

で定義する．このとき, この演算が矛盾なく定義されることを示せ (すなわち, $[x] = [x']$ かつ $[y] = [y'] \Longrightarrow [x + y'] = [x + y']$ を示せ).

問 3.5. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に二項演算"$\times$" を

$$[x] \times [y] := [x \times y]$$

と定義する．このとき, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ の乗法に関する下の表を完成させよ．

$\times$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$
$[0]$						
$[1]$						
$[2]$						
$[3]$						
$[4]$						
$[5]$						

問 3.6. 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ を 100 個の部分集合に分割せよ．すなわち

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{k=1}^{100} A_k, \quad k \neq l \Longrightarrow A_k \cap A_l = \emptyset \text{ かつ } {}^{\forall}k,\ A_k \neq \emptyset$$

となるようにせよ．

問 3.7. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ への写像 f を $f([x]) = [3x + 1]$ と定める．このとき, 写像 f は矛盾なく定義されることを示し, 全単射であることを示せ．ここで, $[\cdot] \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ とする．

4　濃度

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ をそれぞれ自然数, 整数, 有理数, 実数の全体とする.

定義 (対等)

X, Y を集合とする.

$$X \text{ と } Y \text{ が対等} \overset{\text{def}}{\iff} X \text{ から } Y \text{ への全単射が存在する}$$

とし, $X \sim Y$ と表す.

問 4.1. 集合全体の集まりにおいて, 対等という関係は同値関係であることを示せ. すなわち, 対等に関して次の性質が成り立つことを示せ.
(a) 任意の集合 X に対して $X \sim X$.
(b) $X \sim Y$ ならば $Y \sim X$.
(c) $X \sim Y$ かつ $Y \sim Z$ ならば $X \sim Z$.

定義 (濃度とその大小関係)

集合全体の集まりにおいて, 対等という同値関係による同値類を**濃度**という. 集合 X の濃度を $\sharp X$ や $|X|$, $\mathrm{card} X$ などと表す. 濃度の定義より

$$\sharp X = \sharp Y \iff \text{全単射 } X \to Y \text{ が存在.}$$

また, 次のように定義する.

$$\sharp X \leq \sharp Y \iff \text{単射 } X \to Y \text{ が存在,}$$
$$\sharp X < \sharp Y \iff \sharp X \leq \sharp Y \text{ かつ} \sharp X \neq \sharp Y.$$

$$X : \text{有限集合} \overset{\text{def}}{\iff} \sharp X < \infty \quad (\sharp X = 0 \text{ すなわち } X = \emptyset \text{ も含む.})$$
$$X : \text{無限集合} \overset{\text{def}}{\iff} X \text{ は有限集合でない.}$$

さらに無限集合を分けると,

$$X : \text{可算 (無限) 集合} \overset{\text{def}}{\iff} X \sim \mathbb{N} \iff \sharp X = \aleph_0.$$

ただし, $\mathbb{N}$ の濃度を可算濃度といい, $\aleph_0$ で表す ($\sharp\mathbb{N} = \aleph_0$).

$$X : \text{高々可算集合} \overset{\text{def}}{\iff} \sharp X \leq \aleph_0.$$
$$X : \text{非可算集合} \overset{\text{def}}{\iff} X \text{ は高々可算でない.}$$

問 4.2. (1) $\mathbb{Z}$ は可算であることを示せ.
(2) 偶数全体の集合 $2\mathbb{Z} = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ は可算であることを示せ.
(3) 直積集合 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ は可算であることを示せ.

問 4.3. 可算集合の部分集合は高々可算であることを示せ.

[ヒント] A を可算集合とすると, A の元を全単射 $f : \mathbb{N} \to A$ によって定まる順番に従っ

て, $f(1), f(2), \cdots, f(n), \cdots$ と並べて $A = \{f(n) \mid n \in N\}$ と表せる.

問 4.4. 次のことを示せ.

(1) 有限集合 A と可算集合 B の和集合 $A \cup B$ は可算である.

(2) 可算集合 A と可算集合 B の和集合 $A \cup B$ は可算である.

(3) $f : A \to B$, $g : C \to D$ がともに全単射のとき, 写像 $h : A \times C \to B \times D$ を

$$h(x, y) = (f(x), g(y)), \quad (x, y) \in A \times C$$

と定めると, これは全単射である.

(4) 集合 A, B がともに可算のとき, 直積集合 $A \times B$ は可算である.

[ヒント] (1), (2) $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$, $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$.

定理 (Bernstein の定理)

$\sharp X \leq \sharp Y$ かつ $\sharp Y \leq \sharp X$ のとき $\sharp X = \sharp Y$ である.

問 4.5. $\mathbb{Q}$ が可算であることを, ベルンシュタインの定理を用いた以下の手順で示せ.

(a) 直積集合 $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ は可算であることを示せ (できれば, 前の結果を使わずに $\mathbb{N}$ から $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ への全単射を構成せよ).

(b) $\aleph_0 \leq \sharp\mathbb{Q}$ を示せ.

(c) $\sharp\mathbb{Q} \leq \sharp(\mathbb{Z} \times \mathbb{N})$ を示せ.

[ヒント] 有理数は分母が正の既約分数として表す. ただし, 0 は 0/1 と表す :

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{0}{1}\right\} \cup \left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0,\ n \in \mathbb{N},\ \gcd(m, n) = 1\right\}.$$

5　連続体濃度

問 5.1 (前回の復習)**.** Bernstein の定理を用いて次の集合の対等を示せ.

(1) $(-1,1) \sim [-1,1]$

(2) $\{1\} \cup [2,3) \sim [2,3)$

(3) $\mathbb{R} \sim [a,\infty)$

(4) $[1,2] \cup [5,6] \sim [0,3]$

定理 5.1. 半開区間 $(0,1]$ は可算集合ではない.

証明. 背理法で示す. つまり, $(0,1]$ が可算であると仮定する. この仮定より, $(0,1]$ の元は $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\cdots\}$ と並べることができる. $(0,1]$ の任意の元は, 無限小数としてただ一通りに表すことができる. そこで, $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\cdots$ を

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots \\
\alpha_2 &= 0.b_1b_2b_3\cdots b_n\cdots \\
\alpha_3 &= 0.c_1c_2c_3\cdots c_n\cdots \\
&\ \ \vdots \\
\alpha_n &= 0.k_1k_2k_3\cdots k_n\cdots \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

と表す. そこで次のような無限小数で表される実数 $\omega \in (0,1]$ を考える.

$$\omega = 0.r_1r_2r_3\cdots r_n\cdots$$

ここで, $r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots$ はそれぞれ 1 から 9 までの数であるが,

$$r_1 = a_1,\ r_2 = b_2,\ r_3 = c_3,\ \cdots,\ r_n = k_n,\ \cdots$$

と定める. このとき, 小数点以下 n 位を見比べることにより

$$\omega \neq \alpha_n \quad (n = 1,2,\cdots,n,\cdots)$$

であることがわかる. よって $\omega \notin (0,1]$ である. これは仮定に矛盾. □

この証明法を**対角線論法**という.

$\mathbb{R} \sim (0,1]$ なので, 上の定理から次がわかる.

定理 5.2. 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は可算集合ではない. $\mathbb{R}$ の濃度は自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ の濃度より大きい：

$$\sharp\mathbb{R} > \aleph_0.$$

定義 (連続体濃度)

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の濃度を**連続体濃度**といい, 記号 $\aleph$ で表す.

■**選択公理**　選択公理を述べる前に, 直積集合を確認する. 次の定義は有限の直積集合の定義[*2]の一般化である.

定義 (直積).

集合 Λ を添字集合とする集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**直積**を次で定義する:

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \left\{ f : \Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \;\middle|\; {}^\forall\lambda \in \Lambda,\ f(\lambda) \in A_\lambda \right\}.$$

$A_1 = \{1\}, A_2 = \{2,3\}, A_3 = \{4,5,6\}$ とする. このとき, 有限直積の定義の従えば $(1,2,4) \in A_1 \times A_2 \times A_3$ である. 一方, 写像 $f : \{1,2,3\} \to \bigcup_{i\in\{1,2,3\}} A_i$ を

$$1 \mapsto 1 \qquad 2 \mapsto 2 \qquad 3 \mapsto 4$$

と定めると, 上の定義の条件 $({}^\forall i \in \{1,2,3\}, f(i) \in A_i)$ を満たす. すなわち, 写像を 1 つ定めると直積の元が 1 つ定まるのでこれを同一視する.

公理. 集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が空集合を含まないならば, 直積 $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$ である.

定理.

任意の無限集合は, 必ず可算集合を部分集合として含む.

証明. M を無限集合, $\mathcal{M} = 2^M \setminus \{\emptyset\}$ とする. 選択公理より次が成り立つ:

$${}^\exists\Phi : \mathcal{M} \to M : \text{map. s.t. } {}^\forall A \in \mathcal{M},\ \Phi(A) \in A.$$

実際, 選択公理より, $\prod_{A\in\mathcal{M}} A \neq \emptyset$ なので, 各 $A \in \mathcal{M}$ から元 a がとれる. ゆえに $\Phi(A) = a$ とすればよい.

$\{\Phi(A)\}_{A\in\mathcal{M}}$ を $\{a_A\}_{A\in\mathcal{M}}$ と表し, ひとつ固定する. このとき, 写像 $\Psi : \mathbb{N} \to M$ を

$$\Psi(n) = \begin{cases} a_M & (n = 1) \\ a_{M\setminus\{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}\}} & (n > 1). \end{cases}$$

と定めると, Ψ は単射である. よって $|M| \leq \aleph_0$.

一方, M は無限集合なので $|M| \geq \aleph_0$. したがって M は可算であることがわかる.

□

[*2] $(a,b) \in A \times B \overset{\text{def}}{\iff} a \in A \text{ and } b \in B$.

6 濃度の演算

濃度の演算

- 有限集合 A の濃度 $\sharp A$ は A の元の個数と同一視する. 特に $\sharp\emptyset = 0$.
- $\sharp\mathbb{N} = \aleph_0$.
- $\sharp\mathbb{R} = \aleph$.
- $\mathfrak{m} = \sharp A$, $\mathfrak{n} = \sharp B$, ただし A と B は互いに素 $(A \cap B = \emptyset)$ とする. このとき, 濃度の和, 積, 冪を次で定義する.

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = \sharp(A \cup B), \quad \mathfrak{m}\mathfrak{n} = \sharp(A \times B), \quad \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} = \sharp(A^B)$$

ここで, A^B は集合 B から集合 A への写像全体の集合である.

問 6.1. 有限集合の濃度 $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ について, $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$ は整数における通常の指数と一致することを示せ. (つまり, A, B が有限集合のとき, A^B の元の個数は (A の元の個数) の (B の元の個数) 乗であることを示せばよい.)

問 6.2. $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}$ を濃度とするとき, 次の関係式を示せ.

(1) (i) $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = \mathfrak{n} + \mathfrak{m}$, (ii) $\mathfrak{m}\mathfrak{n} = \mathfrak{n}\mathfrak{m}$
(2) (i) $\mathfrak{m} + 0 = \mathfrak{m}$, (ii) $\mathfrak{m}1 = \mathfrak{m}$
(3) $\mathfrak{m}(\mathfrak{n} + \mathfrak{p}) = \mathfrak{m}\mathfrak{n} + \mathfrak{m}\mathfrak{p}$
(4) (i) $\mathfrak{m}^1 = \mathfrak{m}$, (ii) $1^{\mathfrak{m}} = 1$
(5) $\mathfrak{p}^{\mathfrak{m}}\mathfrak{p}^{\mathfrak{n}} = \mathfrak{p}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}$
(6) $\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{m}\mathfrak{n})^{\mathfrak{p}}$

問 6.3. $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{m}', \mathfrak{n}'$ を濃度とするとき, 次を示せ.

(1) $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n},\ \mathfrak{m}' \leq \mathfrak{n}' \Longrightarrow \mathfrak{m} + \mathfrak{m}' \leq \mathfrak{n} + \mathfrak{n}'$

(2) $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n},\ \mathfrak{m}' \leq \mathfrak{n}' \Longrightarrow \mathfrak{m}\mathfrak{m}' \leq \mathfrak{n}\mathfrak{n}'$

7 順序関係, 順序集合

定義 (順序関係, 順序集合, 全順序集合)

- X を集合または集合族とする．X 上の二項関係 R が反射律, 推移律および反対称律を満たすとき, R を X 上の**順序関係**とよぶ：
  (1) (反射律) ${}^{\forall}x \in X,\ xRx.$
  (2) (推移律) xRy かつ $yRz \Longrightarrow xRz.$
  (3) (反対称律) xRy かつ $yRx \Longrightarrow x = y.$
  以後, 一般に順序関係 R を記号 $\leqq$ で表す．$x, y \in X$ に対して, $x \leqq y$ かつ $x \neq y$ が成り立つとき, $x < y$ と書く.
- 集合 X と X 上のの順序関係 $\leqq$ の組 $(X, \leqq)$ を**順序集合**とよぶ.
- 順序集合 $(X, \leqq)$ が**全順序集合**である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ X の任意の 2 元 x, y に対して関係 $x \leqq y$ または $y \leqq x$ の少なくとも一方が成り立つ.

問 7.1. 次のうち, 順序集合となるものを選べ.

(1) 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ と実数の大小関係 $\leq$ の組 $(\mathbb{R}, \leq)$.

(2) 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ と実数の大小関係 $<$ の組 $(\mathbb{R}, <)$.

(3) 2 つ以上の元からなる集合 X のべき集合 $\mathfrak{P}(X)$ と集合の包含関係 $\subset$ の組 $(\mathfrak{P}(X), \subset)$

(4) 集合 $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ と次で定義される関係 $\preceq$ の組 $(\mathbb{N} \setminus \{1\}, \preceq)$:

$$x \preceq y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x \text{ は } y \text{ の約数}.$$

問 7.2. 前問の (1)-(4) のうち, 全順序集合となるものを選べ.

定義 (最小元, 最大元, 下界, 上界, 下限, 上限)

$(X, \leqq)$ を順序集合とし, A を X の空ではない部分集合とする.

- (最大元) $a = \max A \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} a \in A$ and ${}^{\forall}x \in A,\ x \leqq a.$
- (最小元) $a = \min A \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} a \in A$ and ${}^{\forall}x \in A,\ a \leqq x.$
- (極大元) $a : A$ の極大元 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} a \in A$ and ${}^{\nexists}x \in X$ s.t. $a < x.$
- (極小元) $a : A$ の極小元 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} a \in A$ and ${}^{\nexists}x \in X$ s.t. $x < a.$
- (上界) $a : A$ の上界 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} a \in X$ and ${}^{\forall}x \in A,\ x \leqq a.$
- (下界) $a : A$ の下界 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} a \in X$ and ${}^{\forall}x \in A,\ a \leqq x.$
- (上限) $a = \sup A \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \min\{a \in X \mid a$ は A の上界 $\}$
- (下限) $a = \inf A \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \max\{a \in X \mid a$ は A の下界 $\}$

問 7.3. 順序集合 $(\mathbb{R}, \leq)$ を考える．ただし $\leq$ は実数の大小関係とする．以下の (1)～(6) の部分集合に対して,

$$\text{(a) max} \quad \text{(b) min} \quad \text{(c) sup} \quad \text{(d) inf}$$

が存在するならば, それぞれ答えよ.

$$(1)\ \mathbb{N} \quad (2)\ \mathbb{Z} \quad (3)\ [0,1] \quad (4)\ [0,1) \quad (5)\ (0,\infty) \quad (6)\ \left\{\frac{n}{n+1}\ :\ n\in\mathbb{N}\right\}$$

問 7.4. (1) $X=\{a,b,c\}$, $Y=\mathfrak{P}(X)\setminus\{X,\emptyset\}$ とする．このとき順序集合 $(Y,\subset)$ に対して, 極大元と極小元をそれぞれ答えよ．ただし, $\subset$ は集合の包含関係である．

(2) 問 7.1 の (4) の順序集合 $(\mathbb{N}\setminus\{1\},\preceq)$ に対して, 極大元と極小元が存在するならば, それぞれ答えよ．

問 7.5. 次の関係 $\leqq$ が (a) 順序関係であることを示せ．(b) 全順序かを判定せよ．

(1) 集合 $\{a,b,c\}$ において,

$$a\leqq x \overset{\text{def}}{\iff} x=b \text{ or } c,\quad b\leqq x \overset{\text{def}}{\iff} x=b,\quad c\leqq x \overset{\text{def}}{\iff} x=c.$$

(2) $\mathbb{Z}$ において,

$$x\leqq y \overset{\text{def}}{\iff} y-x\geq 0,$$

ただし, $\geq$ は実数における大小関係とする．

(3) $\mathbb{N}$ において,

$$x\leqq y \overset{\text{def}}{\iff} \frac{y}{x}\in\mathbb{N}$$

問 7.6. (1) 集合 X のべき集合 $\mathfrak{P}(X)$ において, 関係 $\leqq$ を

$$A\leqq B \overset{\text{def}}{\iff} A\subset B$$

と定めると, これは順序関係であることを示せ．

(2) (1) の順序を $X=\{a,b,c\}$ のときに考える．このとき次の (i), (ii), (iii) について, それぞれその上界, 上限, 下界, 下限を (存在すれば) 求めよ．

$$(\mathrm{i})\ \{\{a\}\} \quad (\mathrm{ii})\ \{\{a\},\{b\}\} \quad (\mathrm{iii})\ \{\{a\},\{b\},\{c\}\}$$

8 整列集合, 順序同型

定義 (整列集合)

順序集合 $(X,\leqq)$ が整列集合である $\overset{\text{def}}{\iff}$ X の空でない部分集合が必ず最小元をもつ

問 8.1. $\leq$ を実数の大小関係とする．次の順序集合が整列集合であるかを判定せよ．

$$(a)\ (\mathbb{N},\leq) \quad (b)\ (\mathbb{Z},\leq) \quad (c)\ (\mathbb{Q},\leq) \quad (d)\ (\mathbb{R},\leq)$$

問 8.2. (1) $(\mathbb{N},\leqq)$ が整列集合とならないような順序 $\leqq$ を定めよ．

(2) $(\mathbb{Z},\leqq)$ が整列集合となるような順序 $\leqq$ を定めよ．

定義 (順序を保つ写像, 順序同型写像, 順序同型)

$(X, \leqq)$, $(X', \leqq')$ を順序集合とし, f を X から X' への写像とする.

- 写像 $f : X \to X'$ は**順序を保つ**. $\overset{\text{def}}{\iff}$ $x \leqq y \implies f(x) \leqq' f(y)$.
- 写像 $f : X \to X'$ は**順序同型写像**である.
$$\overset{\text{def}}{\iff} f \text{ は全単射で, } f, f^{-1} \text{がともに順序を保つ.}$$
- 順序集合 $(X, \leqq)$ と $(X', \leqq')$ は**順序同型**である.
$$\overset{\text{def}}{\iff} {}^{\exists}f : (X, \leqq) \to (X', \leqq') : \text{順序同型写像.}$$

  $(X, \leqq)$ と $(X', \leqq')$ が順序同型であることを記号で
$$(X, \leqq) \simeq (X', \leqq') \text{ または } X \simeq X'$$
  と表す.

問 8.3. 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ と実数の大小関係 $\leq$ を考える.

(1) 任意の開区間 (a, b), (c, d) に対して, $((a, b), \leq) \simeq ((c, d), \leq)$ であることを示せ.

(2) 任意の半開区間 $[a, b)$ と開区間 (c, d) に対して, $([a, b), \leq)$ と $((c, d), \leq)$ は順序同型ではないことを示せ.

[ヒント] (1) (a, b) から (c, d) への写像 f を
$$f(x) = \frac{d - c}{b - a}(x - a) + c$$
と定めると, f は全単射. (2) は背理法を用いれば楽.