基礎数学演習 1

1　命題と論理

問 1.1. P_1, P_2, P_3, P_5

問 1.2.

(P,Q)	$\neg P$	$\neg P \wedge Q$	$P \Rightarrow Q$
(T,T)	F	T	T
(T,F)	F	F	F
(F,T)	T	T	T
(F,F)	T	T	T

問 1.3.

(1)

(P,Q)	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \Rightarrow P$
(T,T)	T	T
(T,F)	F	T
(F,T)	F	T
(F,F)	F	T

(2)

(P,Q)	$\neg P$	$P \vee \neg P$
(T,T)	F	T
(T,F)	F	T
(F,T)	T	T
(F,F)	T	T

(3)

(P,Q)	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
(T,T)	T	F	F	T
(T,F)	F	T	F	F
(F,T)	T	F	T	T
(F,F)	T	T	T	T

(4)

(P,Q)	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$
(T,T)	T	F	F	F	F
(T,F)	F	T	F	T	T
(F,T)	F	T	T	F	T
(F,F)	F	T	T	T	T

(5)

(P,Q,R)	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
(T,T,T)	T	T	T	T	T
(T,T,F)	T	T	T	F	T
(T,F,T)	T	T	F	T	T
(T,F,F)	F	F	F	F	F
(F,T,T)	T	F	F	F	F
(F,T,F)	T	F	F	F	F
(F,F,T)	F	F	F	F	F
(F,F,F)	F	F	F	F	F

問 1.4. 対偶を考える場合, 時間の前後も考えなければならない. したがって対偶は「勉強しているならば, 怒られた (から)」である.

2　集合の表し方と包含関係

問 2.1. (1) $\{x \mid x = 2m-1,\ m \in \mathbb{N}\}$

(2) $\{x \mid x = 3m-1,\ m \in \mathbb{N}\}$

(3) $\{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$

問 2.2.

(1) $\{1,2\} \subset \mathbb{N}$ (3) $\pi \in \mathbb{R}$ (4) $4 \in \{4\}$ (5) $\{1\} \subset \{1,2\}$ (6) $\emptyset \in 2^{\{1\}}$

問 2.3. 任意の $x \in A$ に対し, $A \subset B$ より $x \in B$ である. また, $B \subset C$ より $x \in C$ である. したがって $A \subset C$ である.

問 2.4. (1) 任意の $x \in A$ に対し, $x = 6n$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在する. このとき, $x = 3(2n)$, $2n \in \mathbb{Z}$ と表せるので $x \in B$. したがって $A \subset B$ である.

(2) ($\subset$) 任意の $x \in A$ に対し, $x = 2m+3n$ となる $m, n \in \mathbb{Z}$ が存在する. 今, $2m, 3n \in \mathbb{Z}$ より $2m+3n \in \mathbb{Z}$ である. よって $x \in \mathbb{Z}$. したがって $A \subset \mathbb{Z}$ である.

($\supset$) 任意の $x \in \mathbb{Z}$ に対し, $x = 2(-x)+3x$ と表せる. ここで, $-x \in \mathbb{Z}$ なので, $x \in A$ である. よって $x \in A$. 以上より $A = \mathbb{Z}$ がわかる.

問 2.5.

(1) $2^{\{1,2\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ (2) $2^{\emptyset} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ (3) $2^{2^{\{1\}}} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\emptyset, \{1\}\}\}$

3 集合の演算

問 3.1. (1)

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\iff x \in A \text{ and } x \in B \\ &\implies x \in A \\ &\implies x \in A \text{ or } x \in B \\ &\iff x \in A \cup B. \end{aligned}$$

(2) ($\Longrightarrow$) $A \subset C$ を示す.

$$\begin{aligned} x \in A &\Longrightarrow x \in A \cup B \quad (\because\ (1)) \\ &\Longrightarrow x \in C \quad (\because\ \text{仮定}) \end{aligned}$$

$B \subset C$ も同様に示せる.

($\Longleftarrow$)

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\iff x \in A \text{ or } x \in B \\ &\Longrightarrow x \in C \text{ or } x \in C \quad (\because\ \text{仮定}) \\ &\Longrightarrow x \in C \end{aligned}$$

(3) ($\Longrightarrow$) $C \subset A$ を示す.

$$\begin{aligned} x \in C &\Longrightarrow x \in A \cap B \quad (\because\ \text{仮定}) \\ &\Longrightarrow x \in A \quad (\because\ (1)) \end{aligned}$$

$C \subset B$ も同様に示せる.

$(\Longleftarrow)$

$$\begin{aligned} x \in C &\iff x \in C \text{ and } x \in C \\ &\Longrightarrow x \in A \text{ and } x \in B \quad (\because \text{ 仮定}) \\ &\iff x \in A \cap B \end{aligned}$$

(4) $(\subset)$ $x \in (A \cup B) \cap C \iff (x \in A \text{ or } x \in B) \text{ and } x \in C$. ここで, $x \in A$ の場合,

$$\begin{aligned} x \in A \text{ and } x \in C &\iff x \in A \cap C \\ &\Longrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad (\because \ (1)). \end{aligned}$$

$x \in B$ の場合も同様. したがって $(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

$(\supset)$

$$\begin{aligned} x \in (A \cap C) \cup (B \cap C) &\iff (x \in A \text{ and } x \in C) \text{ or } (x \in B \text{ and } x \in C) \\ &\Longrightarrow (x \in A \cup B \text{ and } x \in C) \text{ or } (x \in A \cup B \text{ and } x \in C) \quad (\because \ (1)) \\ &\iff x \in (A \cup B) \cap C. \end{aligned}$$

(5) (4) より

$$(A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cap (B \cup C)) \cup (C \cap (B \cup C)). \qquad (*)$$

ここで,

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) =& (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ C \cap (B \cup C) =& C \cup (B \cap C) = C \cup C = C \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} (*) \text{ の右辺} =& (A \cap B) \cup ((A \cap C) \cup C) \\ =& (A \cap B) \cup C \end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned} x \in A \setminus C &\iff x \in A \text{ and } x \notin C \\ &\Longrightarrow x \in A \text{ and } x \notin B \\ &\qquad (\because B \subset C \text{ より } [x \in B \Longrightarrow x \in C] \overset{\text{対偶}}{\iff} [x \notin C \Longrightarrow x \notin B]) \\ &\iff x \in A \setminus B. \end{aligned}$$

(7) $(\subset)$ (1) と (6) より

$$x \in A \setminus B \Longrightarrow x \in A \setminus (A \cap B).$$

$(\supset)$

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (A \cap B) &\iff x \in A \text{ and } x \notin A \cap B \\ &\iff x \in A \text{ and } (x \notin A \text{ or } x \notin B) \\ &\iff (x \in A \text{ and } x \notin A) \text{ or } (x \in A \text{ and } x \notin B) \\ &\iff x \in A \setminus B. \end{aligned}$$

(8)

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cup B) \setminus C &\iff (x \in A \text{ or } x \in B) \text{ and } x \notin C \\
&\iff (x \in A \text{ and } x \notin C) \text{ or } (x \in B \text{ and } x \notin C) \\
&\iff x \in A \setminus C \text{ or } x \in B \setminus C \\
&\iff x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)
\end{aligned}
$$

(9)

$$
\begin{aligned}
x \in (A \setminus B) \setminus C &\iff (x \in A \text{ and } x \notin B) \text{ and } x \notin C \\
&\iff x \in A \text{ and } x \notin B \cup C \\
&\iff x \in A \setminus (B \cup C).
\end{aligned}
$$

問 3.2. (1) ($\subset$)

$$
\begin{aligned}
x \in (A^c)^c &\iff x \in X \text{ and } x \notin A^c \\
&\iff x \in X \text{ and } \neg(x \in X \text{ and } x \notin A) \\
&\iff x \in X \text{ and } (x \notin X \text{ or } x \in A) \\
&\iff (x \in X \text{ and } x \notin X) \text{ or } (x \in X \text{ and } x \in A) \\
&\implies x \in A.
\end{aligned}
$$

($\supset$)

$$
\begin{aligned}
x \in A &\iff x \in A \text{ and } x \in A \\
&\implies x \in X \text{ and } \neg(x \notin A) \\
&\implies x \in X \text{ and } (\neg(x \in X) \text{ or } \neg(x \notin A)) \\
&\implies x \in X \text{ and } \neg(x \in X \text{ and } x \notin A) \\
&\iff x \in X \text{ and } \neg(x \in A^c) \\
&\iff x \in X \text{ and } x \notin A^c \\
&\iff x \in (A^c)^c.
\end{aligned}
$$

(2) ($\Longrightarrow$)

$$
\begin{aligned}
x \in B^c &\iff x \in X \setminus B \\
&\implies x \in X \setminus A \quad (\because \text{ 問 } 3.1\ (6)) \\
&\iff x \in A^c.
\end{aligned}
$$

($\Longleftarrow$) $A^c \supset B^c$ より $(A^c)^c \subset (B^c)^c$. よって (1) より $A \subset B$.

4 「任意の...」と「ある...」

問 4.1. P_1 は真, P_2 は偽であるので同値ではない. 実際, P_1 において, 任意の実数 r に対して

$$
n = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad x < 1 \\ \{r \text{ の整数部分 }\} + 1, & \text{if} \quad x \geq 1 \end{cases}
$$

とおけば, $r < n$ が成り立つ.

問 4.2. (1) ${}^\forall x \in \mathbb{R},\ x > 3 \Longrightarrow\ x < 5.$ (否定) ${}^\exists x \in \mathbb{R}$ s.t. $x > 3 \land x \geq 5$

(2) ${}^\forall n \in \mathbb{Z},\ {}^\exists m \in \mathbb{Z}$ s.t. $n < m$.　　(否定) ${}^\exists n \in \mathbb{Z}$ s.t. ${}^\forall m \in \mathbb{Z},\ n \geq m$.

(3) ${}^\exists r \in \mathbb{R}$ s.t. ${}^\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq r$.　　(否定) ${}^\forall r \in \mathbb{R},\ {}^\exists x \in \mathbb{R}$ s.t. $x > r$.

(4) ${}^\forall q \in\ Q,\ {}^\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $qn \in \mathbb{Z}$.　　(否定) ${}^\exists q \in \mathbb{Q}$ s.t. ${}^\forall n \in \mathbb{N},\ qn \notin \mathbb{Z}$.

(5) ${}^\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \Longrightarrow x^2 \leq y^2$.　　(否定) ${}^\exists x, y \in \mathbb{R}$ s.t. $x \leq y \wedge x^2 \geq y^2$.

(6) ${}^\forall \varepsilon > 0,\ {}^\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$.　(否定) ${}^\exists \varepsilon > 0$ s.t. ${}^\forall N \in \mathbb{N},\ n \geq N \wedge |a_n - a| \geq \varepsilon$.

問 4.3.

$$({}^\forall \varepsilon > 0,\ a < b + \varepsilon) \wedge a > b$$

を仮定する．このとき，

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(a-b) > 0$$

とおくと

$$a < b + \frac{1}{2}(a-b) = \frac{1}{2}(a+b)$$

よって $a < b$. これは仮定に矛盾する．したがって，$a \leq b$ が成り立つ．

5　集合の演算 2

問 5.1. (1)

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c &\iff x \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \\ &\iff {}^\forall \lambda \in \Lambda,\ x \notin A_\lambda \\ &\iff {}^\forall \lambda \in \Lambda,\ x \in A_\lambda^c \\ &\iff x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c. \end{aligned}$$

(2) も同様に示せる．

問 5.2. (1) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}(-n, n) = \mathbb{R}$.

証明. ($\subset$)

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(-n,n) \Longrightarrow {}^\exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } x \in (-n,n) \subset \mathbb{R}.$$

($\supset$)

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R} &\iff {}^\exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } |x| < n \\ &\iff {}^\exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } x \in (-n,n) \\ &\Longrightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(-n,n). \end{aligned}$$

□

(2) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]=[-1,1]$.

証明. $(\subset)$

$$x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]\Longrightarrow\ {}^{\exists}n\in\mathbb{N}\text{ s.t. }x\in\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]\subset[-1,1]$$

$(\supset)$ $n=1$ を考えればよい. □

(3) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]=\{0\}$.

証明. 対偶

$$x\neq 0\iff x\notin\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]$$

を示す.

$$\begin{aligned}
x\neq 0 &\iff |x|>0\\
&\iff {}^{\exists}n\in\mathbb{N}\text{ s.t. }0<\frac{1}{n}<|x|\\
&\iff {}^{\exists}n\in\mathbb{N}\text{ s.t. }x<-\frac{1}{n}\text{ or }\frac{1}{n}<x\\
&\iff {}^{\exists}n\in\mathbb{N}\text{ s.t. }x\notin\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]\\
&\iff x\notin\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right].
\end{aligned}$$

□

(4) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\{0\}$.

証明. $(\subset)$ 対偶

$$x\neq 0\Longrightarrow\ x\notin\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$$

を示す.

$$\begin{aligned}
x\neq 0 &\iff |x|>0\\
&\iff {}^{\exists}n\in\mathbb{N}\text{ s.t. }0<\frac{1}{n}<|x|\\
&\iff {}^{\exists}n\in\mathbb{N}\text{ s.t. }x<-\frac{1}{n}\text{ or }\frac{1}{n}<x\\
&\Longrightarrow {}^{\exists}n\in\mathbb{N}\text{ s.t. }x\leq-\frac{1}{n}\text{ or }\frac{1}{n}\leq x\\
&\iff {}^{\exists}n\in\mathbb{N}\text{ s.t. }x\notin\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\\
&\iff x\notin\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

$(\supset)$

$${}^{\forall}n\in\mathbb{N},\ 0\in\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right).$$

$\square$

問 5.3. (1)

$$\begin{aligned}(x,y)\in\bigcup_{i=1}^{m}A_i\times\bigcup_{j=1}^{n}B_j &\iff x\in\bigcup_{i=1}^{m}A_i \quad \text{and} \quad y\in\bigcup_{j=1}^{n}B_j\\ &\iff {}^{\exists}i\in\{1,2,\ldots,m\}\ \text{s.t.}\ x\in A_i\ \text{and}\ {}^{\exists}j\in\{1,2,\ldots,n\}\ \text{s.t.}\ y\in B_j\\ &\iff {}^{\exists}(i,j)\in\{1,2,\ldots,m\}\times\{1,2,\ldots,n\}\ \text{s.t.}\ x\in A_i\ \text{and}\ y\in B_j\\ &\iff {}^{\exists}(i,j)\in\{1,2,\ldots,m\}\times\{1,2,\ldots,n\}\ \text{s.t.}\ (x,y)\in A_i\times B_j\\ &\iff x\in\bigcup_{(i,j)=(1,1)}^{(m,n)}(A_i\times B_j).\end{aligned}$$

(2) (1) と同様に示せる.

6 写像, 像, 逆像

問 6.1. (1) 写像. (2) 写像でない. (3) 写像. (4) 写像でない.

問 6.2. (1), (4) のみ写像. (2) は $f(1)=1-1=0\notin\mathbb{N}$ となり写像ではない. $f:\mathbb{N}\setminus\{1\}\to\mathbb{N}$ ならば写像. (3) は $x=\pm1$ のとき値が定まらないため写像ではない. $f:\mathbb{R}\setminus\{1,-1\}\to\mathbb{R}$ ならば写像. (5) は $x<0$ のとき, x の平方根は実数ではないので写像ではない. $f:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}$ で $f(x)$ は x の正の平方根と定めると写像.

問 6.3. (1) $f(\{a\})=\{1\}$, $f(\{b,c\})=\{1,2\}$, $f(\{a,c\})=\{1\}$. (2) $f(\emptyset)=\emptyset$, $f^{-1}(\{1\})=\{a,c\}$, $f^{-1}(\{2\})=\{b\}$, $f^{-1}(\{1,2\})=\{a,b,c\}$.

問 6.4. (1) $f((0,1])=[1,\infty)$, $f^{-1}([1,2))=\left(\sqrt{1/2},1\right)$. (2) $g^{-1}([-1,2))=[-1,1]$, $g^{-1}([1,2])=\{1\}$.

問 6.5. (1)

$$\begin{aligned}y\in f(A_1) &\iff {}^{\exists}x\in A_1\ \text{s.t.}\ y=f(x)\\ &\implies {}^{\exists}x\in A_2\ \text{s.t.}\ y=f(x) \qquad (\because A_1\subset A_2)\\ &\implies y\in f(A_2).\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}y\in f(A_1\cap A_2) &\iff {}^{\exists}x\in A_1\cap A_2\ \text{s.t.}\ y=f(x)\\ &\implies {}^{\exists}x\in A_1\ \text{s.t.}\ y=f(x)\ \text{かつ}\ {}^{\exists}x'\in A_2\ \text{s.t.}\ y=f(x')\\ &\implies y\in f(A_1)\ \text{かつ}\ y\in f(A_2)\\ &\implies y\in f(A_1)\cap f(A_2).\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} x \in A &\Longrightarrow f(x) \in f(A) \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(f(A)). \qquad (\because \text{逆像の定義}) \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1) &\Longleftrightarrow f(x) \in B_1 \\ &\Longrightarrow f(x) \in B_2 \qquad (\because B_1 \subset B_2) \\ &\Longrightarrow x \in f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\Longleftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2 \\ &\Longleftrightarrow f(x) \in B_1 \text{ かつ } f(x) \in B_2 \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \text{ かつ } x \in f^{-1}(B_2) \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned} y \in f(f^{-1}(B)) &\Longleftrightarrow {}^{\exists}x \in f^{-1}(B) \text{ s.t. } y = f(x) \\ &\Longleftrightarrow {}^{\exists}f(x) \in B \text{ s.t. } y = f(x) \qquad (\because \text{ 逆像の定義}) \\ &\Longrightarrow y = f(x) \in B. \end{aligned}$$

問 6.6. (2) $X = \{a, b\}$, $Y = \{c, d\}$, $A_1 = \{a\}$, $A_2 = \{b\}$ とし, $f(a) = f(b) = c$ とする. このとき,

$$f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset, \qquad f(A_1) \cap f(A_2) = \{c\} \cap \{c\} = \{c\}.$$

(3) $X = \mathbb{R}$, $Y = [0, \infty)$, $f : X \to Y;\ x \mapsto f(x) = x^2$ とする. このとき, $A = [0, \infty)$ とすると,

$$f^{-1}(f(A)) = f^{-1}([0, \infty)) = \mathbb{R} \neq A.$$

これは全射であるが単射でない例でもある.

(6) $X = [0, \infty)$, $Y = \mathbb{R}$, $f : X \to Y;\ x \mapsto f(x) = x$ とする. このとき, $B = (-\infty, 0]$ とすると,

$$f(f^{-1}(B)) = f(f^{-1}((-\infty, 0])) = f(\{0\}) = \{0\} \neq B..$$

これは単射であるが全射でない例でもある.

問 6.7. (1) $f(\{-2, 0, 1\}) = \{0, 2\}$.

(2) $f((-\infty, 1]) = (-\infty, 4]$.

(3) $f^{-1}(\{4\}) = \{-1, 2\}$.

(4) $f^{-1}((-\infty, 2]) = (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [0, \sqrt{3}]$.

(5) $f^{-1}(f([1, 2))) = [-2, -1) \cup (-1, 2)$.

7 全射, 単射, 合成写像, 逆写像

問 7.1. (1) 全単射, (2) どちらでもない, (3) 全射, (4) 単射

問 7.2. (1) どちらでもない, (2) 単射, (3) 全射, (4) 全単射

問 7.3. まず単射であることを示す．$f(x) = f(x')$ であると仮定すると,

$$3x + 2 = 3x' + 2. \qquad \therefore\ x = x'$$

よって単射である.

次に全射であることを示す．任意の $y \in \mathbb{R}$ に対して, $x = \dfrac{y-2}{3}$ とおけば, $x \in \mathbb{R}$ で

$$f(x) = 3 \cdot \frac{y-2}{3} + 2 = y.$$

よって全射である.

問 7.4. $g \circ f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ で

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x}{x+1}\right) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - 1.$$

$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は定義できない．実際,

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(y^2 - 1) = \frac{y^2 - 1}{y^2} = 1 - \frac{1}{y^2}$$

であるが, $(f \circ g)(0) \notin \mathbb{R}$ である $(g(0) = -1 \notin \mathbb{R} \setminus \{-1\})$.

問 7.5. (1)

$$\begin{aligned} x \neq x' &\Longrightarrow f(x) \neq f(x') \qquad (\because\ f : \text{単射}) \\ &\Longrightarrow g(f(x)) \neq g(f(x')) \qquad (\because\ g : \text{単射}) \\ &\Longleftrightarrow (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(x'). \end{aligned}$$

(2) g が全射なので, ${}^\forall z \in Z$ に対し, $g(y) = z$ となる $y \in Y$ が存在する．また, f も全射なので, この $y \in Y$ に対し, $f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在する．よって, 任意の $z \in Z$ に対して, 次を満たす $x \in X$ が存在する:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z.$$

以上より $g \circ f$ は全射である.

(3) $f(x) = f(x')$ とすると, 写像の定義より $g(f(x)) = g(f(x'))$．すなわち $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$ である．$g \circ f$ は単射なので $x = x'$．よって f は単射である.

(4) $g \circ f$ は全射なので, ${}^\forall z \in Z$ に対して $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = z$ となる $x \in X$ が存在する．よって, ${}^\forall z \in Z$ に対して $y = f(x) \in Y$ とおくと,

$$g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = z.$$

よって g は全射である.

注意 7.1 (上の問の (2) について)**.** 一般に, 次のことが成り立つ.

$$f : X \to Y : \text{全射} \iff f(X) = Y.$$

これを用いると

(2) $g \circ f$ は X から Z への写像なので, $g \circ f(X) = Z$ を示す.

$$\begin{aligned} g \circ f(X) &= g(f(X)) \\ &= g(Y) \quad (\because\ f : \text{全射より } f(X) = Y) \\ &= Z \quad (\because\ g : \text{全射より } g(Y) = Z). \end{aligned}$$

よって g は全射.

問 7.6. (1) 任意の $y \in Y$ に対し, $x = g(y)$ とおくと, $x \in X$ で

$$f(x) = f(g(y)) = f \circ g(y) = id_Y(y) = y.$$

よって f は全射.

(2) $x, x' \in X$ に対し, $f(x) = f(x')$ とすると, 仮定 $g \circ f = id_X$ より

$$x = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = (g \circ f)(x') = x'.$$

よって f は単射.

(3) f を全単射と仮定する. このとき, f が全射であることにより

$$^{\forall}y \in Y,\ ^{\exists}x \in X \text{ s.t. } f(x) = y$$

が成り立つ. さらに f が単射であることにより, 任意の y に対してこのような x は唯一つ存在する. それゆえ, 写像 $g : Y \to X$ を

$$Y \ni y \mapsto g(y) = x \in X.$$

と定めると

$$\begin{aligned} f \circ g(y) &= f(g(y)) = f(x) = y = id_Y(y) \\ g \circ f(x) &= g(f(x)) = x = id_X(x) \end{aligned}$$

が成り立つ.

問 7.7. $f(x) = y$ とおく. これを x について解くと

$$x = \frac{b-a}{d-c}(y-c) + a.$$

よって, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$ に対して, 写像 $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ を

$$f^{-1}(y) = \frac{b-a}{d-c}(y-c) + a$$

とおくと, f^{-1} は f の逆写像である.

問 7.8. (1) $f : X \to Y$ より

$$f^{-1} : Y \to X, \qquad (f^{-1})^{-1} : X \to Y$$

である. 固定された任意の $x \in X$ に対して $f(x) = y$ とおくと, 逆写像の定義より $f^{-1}(y) = x$ である. $(f^{-1})^{-1}(x)$ の値は, 定義より, $f^{-1}(y) = x$ となる唯一つの y で

ある．すなわち

$$(f^{-1})^{-1}(x) = y = f(x).$$

よって $(f^{-1})^{-1} = f$ が成り立つ．

(2) $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ より，

$$\begin{aligned} g \circ f :& X \to Z, \\ (g \circ f)^{-1} :& Z \to X, \\ f^{-1} :& Y \to X, \\ g^{-1} :& Z \to Y, \\ f^{-1} \circ g^{-1} :& Z \to X \end{aligned}$$

である．固定された任意の $x \in X$ に対して，$f(x) = y, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ とおく．このとき, 逆写像の定義より $(g \circ f)^{-1}(z) = x$．一方, $f^{-1}(y) = x$, $g^{-1}(z) = y$ より，

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(z) = f^{-1}(g^{-1}(z)) = f^{-1}(y) = x.$$

よって $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ を得る．

$\boxed{2}$ (i)⇒(ii)

$$
\begin{aligned}
& x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \\
\Longrightarrow & x \in (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c) \\
\Longrightarrow & x \in A \cap (B^c \cap C^c) \\
\Longrightarrow & x \in A \text{ かつ } x \in B^c \cap C^c \\
\Longrightarrow & x \in A \text{ かつ } x \in (B \cup C)^c \\
\Longrightarrow & x \in A \text{ かつ } x \notin B \cup C \\
\Longrightarrow & x \in B \cup C \text{ かつ } x \notin B \cup C \quad (\because \text{(i)})
\end{aligned}
$$

このような元 x は存在しないので, $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \emptyset$ である.

(ii)⇒(iii)　$x \in A \setminus B$ とする．このとき, $x \notin C$ とすると $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ となり, 仮定に反する．よって $x \in C$ である．したがって $A \setminus B \subset C$ が成り立つ.

(iii)⇒(i)　$x \in A$ とする．このとき $x \in B$ とすると $x \in B \cup C$ が成り立ち, $x \notin B$ とすると $x \in A \setminus B$ であるから, 仮定より $x \in C$ である．したがって $A \subset B \cup C$ が成り立つ.

$\boxed{3}$

(1) $f(\{3, 9, 27\}) = \{0, 1, 5\}$,　$f^{-1}(\{1, 2\}) = \{5 \leq n < 15 \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$.

(2) (i) 全射性について．任意の $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $n = 5l$ とおくと $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で

$$f(n) = f(5l) = \left[\frac{5l}{5}\right] = [l] = l.$$

したがって f は全射.

(ii) 単射性について．例えば $1 \neq 2$ であるが $f(1) = 0$, $f(2) = 0$ なので, f は単射ではない.

(i), (ii) より f は全射であるが単射ではない.

(3) (i) 全射性について．任意の $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $n = 5l$ とおくと $n \in A$ で

$$f(n) = f(5l) = \left[\frac{5l}{5}\right] = [l] = l.$$

したがって f は全射.

(ii) 単射性について．任意の $5m, 5m' \in A$ に対して, $f(5m) = f(5m')$ と仮定する．このとき

$$\left[\frac{5m}{5}\right] = \left[\frac{5m'}{5}\right]$$

が成り立つ．よって $[m] = [m']$ となり, $m = m'$ である．したがって f は単射である.

(i), (ii) より f は全単射である.

$\boxed{4}$

(1) 任意の $x \in X$ に対して

$$F(g)(x) = F(g')(x)$$

とする. このとき

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g' \circ f(x) \\ \therefore\ g(f(x)) &= g'(f(x)) \end{aligned}$$

今, f が全射なので, 任意の $y = f(x) \in Y$ に対して $g(y) = g'(y)$ が成り立っている. よって

$$g = g'.$$

したがって, F は単射である.

(2) $f : X \to Y$ が単射なので, 写像 $\widetilde{f} : X \to f(X)$ を

$$\widetilde{f} : X \ni x \mapsto \widetilde{f}(x) = f(x) \in f(X)$$

と定義すると $\widetilde{f}$ は全単射である.

h を Z^X の任意の元とする. $z \in Z$ をひとつ固定しておく.

$$g(y) = \begin{cases} (h \circ \widetilde{f}^{-1})(y) & \text{if } y \in f(X), \\ z & \text{if } y \notin f(X) \end{cases} \tag{$*$}$$

とおくと, $g \in Z^Y$ で, 任意の $x \in X$ に対し

$$\begin{aligned} F(g)(x) = g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(\widetilde{f}(x)) = h \circ \widetilde{f}^{-1}(\widetilde{f}(x)) = h(x). \end{aligned}$$

よって F は全射である.

[注意]　(1) はあくまで単射性の問題なので, 示すべきことは「$F(g) = F(g') \Longrightarrow g = g'$」である. 仮定 $F(g) = F(g')$ を写像の等号の定義を用いて表すと,「任意の $x \in X$ に対して $F(g)(x) = F(g')(x)$」である. 導きたい $g = g'$ は「任意の $y \in Y$ に対して $g(y) = g'(y)$」であることに注意.

(2) は全射性の問題なので, 示すことは「任意の $h \in Z^X$ に対して, $g =$ ＿＿ とおくと, $g \in Z^Y$ で $F(g) = h$ である」である. $(*)$ で定義した g がどのような写像なのかを (図を用いて) 確認しておくこと.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "F(g) = g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

8　補充問題

問 8.1. ($\Longrightarrow$) $f : A \to B$ が単射であると仮定すると, $^\forall y \in f(A)$ に対して, $f(x) = y$ となる $x \in A$ が唯一つ存在する．ゆえに, B から A への対応 g を

$$g(y) := \begin{cases} x & (y \in f(A)) \\ a & (y \in B \setminus f(A)), \end{cases}$$

とおくと, g は写像である．ここで, a は A の任意の元である．さらに g は全射である．実際, $^\forall x \in A$ に対して, $y = f(x) \in B$ とおけば, $g(y) = x$ となる．

($\Longleftarrow$) 全射 $g : B \to A$ が存在すると仮定する．

$$C_x := \{y \in B \mid g(y) = x\}$$

とし, 集合族 $\{C_x\}_{x \in A}$ を考える．g は全射なので, $^\forall x \in A$ に対し, $C_x \neq \emptyset$ である．ゆえに, 選択公理[*1]より, 各 x に対し, C_x からそれぞれ 1 つ元を選び取ることができる．そこで, y_x を C_x から選び取った元とすると, $f : A \to B$ を

$$f(x) = y_x$$

で定義すれば f は単射となる．

問 8.2. (1)

$$\begin{aligned} y \in f(A_1) \setminus f(A_2) &\Longleftrightarrow y \in f(A_1) \text{ かつ } y \notin f(A_2) \\ &\Longleftrightarrow {}^\exists x \in A_1;\ y = f(x) \text{ かつ } {}^\nexists x' \in A_2;\ y = f(x') \\ &\Longrightarrow {}^\exists x \in A_1 \setminus A_2;\ y = f(x) \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A_1 \setminus A_2) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2) &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \text{ かつ } x \notin f^{-1}(B_2) \\ &\Longleftrightarrow f(x) \in B_1 \text{ かつ } f(x) \notin B_2 \\ &\Longleftrightarrow f(x) \in B_1 \setminus B_2 \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(B_1 \setminus B_2) \end{aligned}$$

(3) $A = \mathbb{R},\ B = [0, \infty),\ f : \mathbb{R} \to [0, \infty);\ f(x) = x^2$ とし, $A_1 = [1, 2],\ A_2 = [-2, 1]$ とする．このとき,

$$\begin{aligned} &f(A_1) \setminus f(A_2) = [1, 4] \setminus [1, 4] = \emptyset \\ &f(A_1 \setminus A_2) = f([1, 2]) = [1, 4] \end{aligned}$$

となり $f(A_1) \setminus f(A_2) \neq f(A_1 \setminus A_2)$.

問 8.3. $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\},\ B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ とする．

(1) ($\Longrightarrow$) 単射 $f : A \to B$ が存在するとき, $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_m) \in B$ はそれぞれ異

[*1] 集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が空集合を含んでいない ($^\forall \lambda \in \Lambda,\ A_\lambda \neq \emptyset$) ならば, 集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に属する各集合 A_λ から一つずつ元を選ぶことができる．

なるので $m \leq n$ が成り立つ.

($\Longleftarrow$) $m \leq n$ のとき, 写像 $f : A \to B$ を $f(a_i) = b_i$ で定義すれば, これは単射である.

(2) ($\Longrightarrow$) 全射 $f : A \to B$ が存在するとき, すべての i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ に対し, $f(a_i) = b_i$ となる $a_i \in A$ が存在する (写像の定義より $a_1, a_2, \ldots, a_n$ はすべて異なる). よって $m \geq n$ である.

($\Longleftarrow$) $m \geq n$ のとき, 写像 $f : A \to B$ を

$$f(a_i) = \begin{cases} b_i & (i \leq n) \\ b_n & (i > n) \end{cases}$$

で定義すると, これは全射である.

(3) ($\Longrightarrow$) (1),(2) より従う.

($\Longleftarrow$) $m = n$ のとき, 写像 $f : A \to B$ を $f(a_i) = b_i$ で定義すればこれは全単射である.

問 8.4. $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ とする. $n = 1$ のとき,

$$\sharp 2^A = \sharp 2^{\{1\}} = \sharp\{\emptyset, \{1\}\} = 2$$

より成り立つ. $n = k-1$ のとき, $\sharp 2^A = \sharp 2^{\{1,2,\ldots,k-1\}} = k-1$ が成り立つと仮定する. $n = k$ のとき, $A = \{1, 2, \ldots, k\}$ の部分集合は, k を含むものと含まないものに分けることができる[*2]. また, k を含む部分集合は $\{1, 2, \ldots, k-1\}$ の部分集合に k を付け加えた集合なので,

$$2^A = 2^{\{1,2,\ldots,k\}} = \{a \cup \{n\} \mid a \in 2^{\{1,2,\ldots,k-1\}}\} \cup 2^{\{1,2,\ldots,k-1\}}$$

と表わされる. よって仮定より

$$\sharp 2^A = 2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k.$$

[*2] 例えば,

$$\begin{aligned} 2^{\{1,2,3\}} =& \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\} \\ =& \{\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\} \cup \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\} \\ =& \{3 \text{ を含む }\} \cup \{3 \text{ を含まない }\} \\ =& \{a \cup \{3\} \mid a \in 2^{\{1,2\}}\} \cup 2^{\{1,2\}} \end{aligned}$$

問 8.5. (1) ($\subset$)

$$
\begin{aligned}
x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} [n, n+1] &\iff {}^{\exists} n \in \mathbb{N} \cup \{0\};\ x \in [n, n+1] \\
&\Longrightarrow x \in [0, \infty) \qquad (\because\ [n, n+1] \subset [0, \infty))
\end{aligned}
$$

($\supset$)

$$
\begin{aligned}
x \in [0, \infty) &\Longrightarrow {}^{\exists} n \in \mathbb{N} \cup \{0\};\ x \in (n, n+1) \qquad (\because\ \text{アルキメデスの公理}) \\
&\Longrightarrow x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} [n, n+1] \qquad (\because\ (n, n+1) \subset [n, n+1])
\end{aligned}
$$

(2) ($\subset$)

$$
\begin{aligned}
x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} (n, n+1) &\iff {}^{\exists} n \in \mathbb{N} \cup \{0\};\ x \in (n, n+1) \\
&\Longrightarrow x \in (0, \infty) \setminus \mathbb{N} \qquad (\because\ (n, n+1) \subset (0, \infty) \setminus \mathbb{N})
\end{aligned}
$$

($\supset$)

$$
\begin{aligned}
x \in (0, \infty) \setminus \mathbb{N} &\Longrightarrow {}^{\exists} n \in \mathbb{N} \cup \{0\};\ x \in (n, n+1) \qquad (\because\ \text{アルキメデスの公理}) \\
&\Longrightarrow x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} (n, n+1)
\end{aligned}
$$

(3) ($\subset$)

$$
\begin{aligned}
x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] &\iff {}^{\exists} n \in \mathbb{N};\ x \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \\
&\Longrightarrow x \in [-1, 1] \qquad \left(\because\ \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \subset [-1, 1]\right)
\end{aligned}
$$

($\supset$) $x \in [-1, 1]$ のとき, $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ は自明.

(4) (3) と同様.

(5) 対偶を示す.

$$
\begin{aligned}
x \neq 0 &\iff |x| > 0 \\
&\iff {}^{\exists} n \in \mathbb{N};\ 0 < \frac{1}{n} < |x| \\
&\iff {}^{\exists} n \in \mathbb{N};\ x < -\frac{1}{n} \quad \text{or} \quad \frac{1}{n} < x \\
&\iff {}^{\exists} n \in \mathbb{N};\ x \notin \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \\
&\iff x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]
\end{aligned}
$$

(6) ($\subset$) 対偶を示す.

$$\begin{aligned} x \neq 0 &\iff |x| > 0 \\ &\iff {}^\exists n \in \mathbb{N};\ 0 < \frac{1}{n} < |x| \\ &\iff {}^\exists n \in \mathbb{N};\ x < -\frac{1}{n} \quad \text{or} \quad \frac{1}{n} < x \\ &\implies {}^\exists n \in \mathbb{N};\ x \leq -\frac{1}{n} \quad \text{or} \quad \frac{1}{n} \leq x \\ &\iff {}^\exists n \in \mathbb{N};\ x \notin \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \\ &\iff x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

($\supset$) ${}^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $-\frac{1}{n} < 0 < \frac{1}{n}$ なので, $0 \in \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$.

(7) ($\subset$)

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right] &\iff {}^\exists n \in \mathbb{N};\ \frac{1}{n} \leq x \leq 1 + \frac{1}{n} \\ &\implies x \in (0, 2] \qquad \left(\because\ 0 < \frac{1}{n} \quad \text{かつ} \quad 1 + \frac{1}{n} \leq 2\right) \end{aligned}$$

($\supset$)

$x \in (0, 1)$ のとき, アルキメデスの公理より,

$$ {}^\exists n \in \mathbb{N};\ 0 < \frac{1}{n} < x < 1 < 1 + \frac{1}{n}. $$

よって, $\displaystyle\left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) \subset \left[\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$ より $x \in \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$.

$x \in [1, 2]$ のとき, $x \in \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$ であることは自明 ($n = 1$).

(8) ($\subset$)

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) &\iff {}^\exists n \in \mathbb{N};\ \frac{1}{n} < x < 1 + \frac{1}{n} \\ &\implies x \in (0, 2) \qquad \left(\because\ 0 < \frac{1}{n} \quad \text{かつ} \quad 1 + \frac{1}{n} < 2\right) \end{aligned}$$

($\supset$)

$x \in (0, 1)$ のとき, アルキメデスの公理より,

$$ {}^\exists n \in \mathbb{N};\ 0 < \frac{1}{n} < x < 1 < 1 + \frac{1}{n}. $$

よって $x \in \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$.

また, $x \in (1, 2)$ のとき, $x \in \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$ であることは自明 ($n = 1$).

さらに, $\dfrac{1}{2} < 1 < 1 + \dfrac{1}{2}$ なので, $1 \in \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$.

以上より,

$$x \in (0,2) \Longrightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right).$$

(9) ($\subset$) 対偶を示す. $x < 1$ のとき, $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right]^C$ であることは自明. よって $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right]$.

$1 < x$ のとき, アルキメデスの公理より,

$$^{\exists}n \in \mathbb{N};\ 1 < 1+\frac{1}{n} < x.$$

よって $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right]$.

($\supset$) $^{\forall}n \in \mathbb{N}$ に対して, $\frac{1}{n} \leq 1 \leq 1+\frac{1}{n}$ より, $1 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right]$.

(10) $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)$ とすると,

$$^{\forall}n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{n} < x \quad \text{かつ} \quad x < 1+\frac{1}{n}.$$

よって, $1 < x$ かつ $x \leq 1$ となるが, このような x は存在しない. よって $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right) = \emptyset$.

(11) ($\subset$) 対偶を示す.

$x < 1$ のとき,

$$\begin{aligned} x < 1 &\Longrightarrow {}^{\exists}n \in \mathbb{N};\ x < \frac{1}{n} \\ &\Longrightarrow {}^{\exists}n \in \mathbb{N};\ x \notin \left[\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right] \\ &\Longrightarrow x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right]. \end{aligned}$$

$x > 2$ のとき,

$$\begin{aligned} x > 2 &\Longrightarrow 0 < x-2 \\ &\Longrightarrow {}^{\exists}n \in \mathbb{N};\ \frac{1}{n} < x-2 \\ &\Longrightarrow {}^{\exists}n \in \mathbb{N};\ 2+\frac{1}{n} < x \\ &\Longrightarrow {}^{\exists}n \in \mathbb{N};\ x \notin \left[\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right] \\ &\Longrightarrow x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right]. \end{aligned}$$

($\supset$)

$^{\forall}n \in \mathbb{N}$ に対して, $\frac{1}{n} < 1 < 2 < 2+\frac{1}{n}$ より $[1,2] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right]$.

(12) ($\subset$) 対偶を示す.

$x \leq 1$ のとき,

$$\begin{aligned} x \leq 1 &\Longrightarrow {}^{\exists} n \in \mathbb{N};\ x \leq \frac{1}{n} \quad \text{or} \quad 2+\frac{1}{n} \leq x \\ &\Longrightarrow {}^{\exists} n \in \mathbb{N};\ x \notin \left(\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right) \\ &\Longrightarrow x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

$x > 2$ のとき,

$$\begin{aligned} x > 2 &\Longrightarrow 0 < x-2 \\ &\Longrightarrow {}^{\exists} n \in \mathbb{N};\ \frac{1}{n} < x-2 \\ &\Longrightarrow {}^{\exists} n \in \mathbb{N};\ 2+\frac{1}{n} < x \\ &\Longrightarrow {}^{\exists} n \in \mathbb{N};\ 2+\frac{1}{n} \leq x \\ &\Longrightarrow {}^{\exists} n \in \mathbb{N};\ x \notin \left(\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right) \\ &\Longrightarrow x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

($\supset$)

${}^{\forall} n \in \mathbb{N}$ に対して, $\dfrac{1}{n} < 1 < 2 < 2+\dfrac{1}{n}$ より $[1,2] \subset \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right)$.