基礎数学演習 1

1　命題と論理

定義 (命題)

(a) (数学的に) 真偽を判定できる叙述を**命題**といい, $P, Q, R, \cdots$ などで表す.

(b) P, Q を命題とするとき, 次の命題が定まる:

$P \vee Q$	: P または Q	(P と Q の少なくとも一方が真のとき真となる命題).
$P \wedge Q$	: P かつ Q	(P と Q の両方が真のとき真となる命題).
$\neg P$	: P の否定	(P と真偽が逆転する命題).
$P \Rightarrow Q$	: P ならば Q	(P が真で Q が偽のときのみ偽となる命題).
$P \Leftrightarrow Q$	: P と Q は同値	(P と Q の真偽が一致しているとき真となる命題).

(c) 次のように, 真偽を列挙した表を**真偽表**とよぶ:

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

T　: 真 (true)
F　: 偽 (false)

命題 $P \Rightarrow Q$ が真であるとき, P を Q の**十分条件**といい, Q を P の**必要条件**という. 命題 $P \Leftrightarrow Q$ が真であるとき, P を Q の (Q を P の) **必要十分条件**という. また, 命題 $\neg Q \Rightarrow \neg P$ を命題 $P \Rightarrow Q$ の**対偶**という.

問 1.1. 次の中から命題をすべて選べ.

P_1 : 1 は素数である.　P_2 : すべての有理数は実数である.　P_3 : 犬は動物である.
P_4 : 運河と柏は近い.　P_5: $x^2 - 3x + 2 = 0$.　P_6: 2^{-100} は小さい数である.

問 1.2. 命題 $(\neg P) \vee Q$ の真偽表を書け. また, これを用いて命題 $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\neg P) \vee Q)$ は常に真であることを示せ.

問 1.3. 真偽表を用いて, 次の命題は常に真であることを示せ.

(1) $P \vee (\neg P)$,　(2) $(P \wedge Q) \Rightarrow P$,　(3) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$,
(4) $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$,　(5) $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

問 1.4. 次の命題の否定を述べよ.

(1) A 君も B 君も, ともに努力家である.
(2) 全ての整数は 2 または 3 の倍数である.
(3) ある実数 x が存在して, $f(x)$ の絶対値は 1 以下である.

問 1.5. 命題「怒られないと勉強しない」の対偶を述べよ.

2　集合の表し方と包含関係

定義 (集合, 元)

数学的に明確な範囲が定められた, 数学的に明確な対象の集まりを**集合**(set) といい, 集合を構成しているものを, その集合の**元**(elements) という．a が集合 A の元であるとき, $a \in A$ と表わし, a は A に属する, または, a は A に含まれるという．

例 **2.1.**

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &:= \text{自然数全体の集合} = \{1, 2, 3, \ldots\} \\
\mathbb{Z} &:= \text{整数全体の集合} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\} \\
\mathbb{Q} &:= \text{有理数全体の集合} = \left\{ \frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N} \right\} \\
\mathbb{R} &:= \text{実数全体の集合 (= 有理数と無理数を合わせた全体)} \\
\mathbb{C} &:= \text{複素数全体の集合} = \{x + \sqrt{-1}y \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

無理数全体を表わす特別な記号はない．上の記号”:=”は”左辺を右辺で定義する”という意味である．人によっては違う記号を用いるので注意.

定義 (空集合, 有限集合, 無限集合)

元を一つももたない集合を**空集合**(empty set) といい, 記号 $\emptyset$ と表わす.

元を有限個しか含まない集合を**有限集合**(finite set) とよび, 無限に多くの元を含む集合を**無限集合**(infinite set) という.

定義 (部分集合)

A, B を集合とする.

(i) A の任意の元が B に属するとき, すなわち

$$x \in A \Longrightarrow x \in B$$

であるとき, A は B の**部分集合**(subset) であるといい, $A \subset B$ と書く.

(ii) $A \subset B$ かつ $B \subset A$ であるとき, すなわち

$$x \in A \Longleftrightarrow x \in B$$

であるとき, A と B は**等しい**といい, $A = B$ と表わす.

定義 (冪集合)

集合 X の部分集合全体の集合を X の**冪集合**(power set) といい, 2^X と表わす.

冪集合のように, その元がすべて集合であるような集合は**集合族**(family of set) と呼ばれる.

問 2.1. 次の集合を, 内包的記法 (法則を述べる方法) で表せ.

(1) 正の奇数の集合.

(2) 3 で割ると 2 余る正の整数の集合.

(3) 原点を中心とする半径 1 の円周.

問 2.2. 次の中から正しくない記法をすべて選び, 修正せよ. ただし, $2^{\{1,2\}}$ は集合 $\{1,2\}$ のべき集合 (部分集合全体の集合) とする.

(1) $\{1,2\} \in \mathbb{N}$　(2) $\{1\} \subset \mathbb{N}$　(3) $\pi \subset \mathbb{R}$　(4) $4 = \{4\}$　(5) $\{1\} \in \{1,2\}$
(6) $\{\emptyset\} \in 2^{\{1\}}$　(7) $\emptyset \subset 2^{\{1\}}$

問 2.3. A, B, C を集合とする. $A \subset B$ かつ $B \subset C$ であるとき $A \subset C$ であることを示せ.

問 2.4. (1) $A = \{x \mid x = 6n,\ n \in \mathbb{Z}\}$,　$B = \{x \mid x = 3n,\ n \in \mathbb{Z}\}$
とするとき, $A \subset B$ であることを示せ.
(2) $A = \{x \mid x = 2m + 3n,\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}\}$ とするとき, $A = \mathbb{Z}$ であることを示せ.

問 2.5. 次の集合のべき集合をそれぞれ求めよ.

(1) $\{1,2\}$　(2) $\emptyset$　(3) $2^{\{1\}}$

3　集合の演算

定義 (和集合, 共通部分)

A, B を集合とする．A, B の少なくともどちらか一方に属している元全体の集合を集合 A と B の**和集合**(union) といい, $A \cup B$ と表わす．また, A, B のどちらにも属している元全体の集合を集合 A と B の**共通部分**(intersection) といい, $A \cap B$ と表わす.

$$x \in A \cup B \overset{\text{def}}{\iff} x \in A \text{ または } x \in B,$$

$$x \in A \cap B \overset{\text{def}}{\iff} x \in A \text{ かつ } x \in B.$$

定理 3.1. 集合 A, B, C に対して以下が成り立つ.

(1) 交換法則

$$(a)\ A \cup B = B \cup A, \qquad (b)\ A \cap B = B \cap A$$

(2) 結合法則

$$(a)\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \qquad (b)\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

(3) 分配法則

$$(a)\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \qquad (b)\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

定義 (差集合, 補集合)

集合 A の元で集合 B に属さいないもの全体の集合を A と B の**差集合**(difference set) といい, $A \setminus B$ と表わす.

$$x \in A \setminus B \overset{\text{def}}{\iff} x \in A \text{ かつ } x \notin B$$

ある特定の集合 (普遍集合)X の部分集合だけを考えている場合, X の部分集合 A に対し差集合 $X \setminus A$ のことを A の**補集合**(complement) といい, 記号 A^c(または $\overline{A}$) と表わす.

$$x \in A^c \overset{\text{def}}{\iff} x \in X \text{ かつ } x \notin A$$

問 3.1. A, B, C を集合とするとき, 次を示せ.

(1) $A \cap B \subset A \subset A \cup B$

(2) $A \cup B \subset C \iff A \subset C$ かつ $B \subset C$

(3) $C \subset A \cap B \iff C \subset A$ かつ $C \subset B$

(4) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

(5) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

(6) $B \subset C \Longrightarrow A \setminus C \subset A \setminus B$

(7) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

(8) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

(9) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

問 3.2. X を集合, A, B を X の部分集合とするとき, 次を示せ.

$$(1)\ (A^c)^c = A, \qquad (2)\ A \subset B \iff A^c \supset B^c$$

4 「任意の...」と「ある...」

任意記号と存在記号

「集合 A の任意の元 x に対して, 命題 $P(x)$ が成り立つ.」という命題は記号で

$$^\forall x \in A,\ P(x).$$

などと書く. また, 「命題 $P(x)$ が成り立つような集合 A の元 x が存在する.」という命題は記号で

$$^\exists x \in A \text{ s.t. } P(x) \quad \text{あるいは} \quad ^\exists x \in A;\ P(x)$$

などと書く (s.t. は such that の略). 記号「$^\forall$」を**任意記号**(全称記号), 「$^\exists$」を**存在記号**と呼ぶ.

「集合 A の任意の元 x に対して, 命題 $P(x)$ が成り立つ」という命題の否定命題は「$P(x)$ が成り立たないような A の元 x が存在する」となる. つまり,

$$\neg(^\forall x \in A,\ P(x)) \iff {}^\exists x \in A;\ \neg P(x).$$

問 4.1. 次の命題 P_1, P_2 は同値であるか判定せよ.

$$P_1:\ {}^\forall x \in \mathbb{R},\ {}^\exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } x < n, \qquad P_2:\ {}^\exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } {}^\forall x \in \mathbb{R},\ x < n.$$

問 4.2. 次の (真とは限らない) 命題を論理記号を用いて表せ. また, それぞれの否定命題を論理記号を用いて表せ.

(1) 3 より大きい実数は 5 より小さい.

(2) いくらでも大きな整数が存在する.

(3) 実数には最大の元が存在する.

(4) 適当な自然数をかけることにより, 任意の有理数は整数になる.

(5) 実数を二乗する操作は大小関係を保つ.

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

問 4.3. $a, b \in \mathbb{R}$ とする. このとき次の命題が真であることを背理法[*1]を用いて示せ.

$$^\forall \varepsilon > 0,\ a < b + \varepsilon \implies a \leq b.$$

[*1] 背理法とは, 示したい命題 P を否定し, そこから矛盾を導くことで, P の否定が偽 (すなわち P が真) であることを示す論法のこと.

5　集合の演算 2

定義(集合族)

集合 Λ の元 λ に対して集合 A_λ が与えられているとする．このような集合の集まり $\mathcal{A} = \{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ を (添字づけられた) **集合族**(family of sets) という．このとき, A_λ, $\lambda \in \Lambda$ の共通部分と和集合をそれぞれ次のように定義する．

$$x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \overset{\text{def}}{\iff} {}^\forall \lambda \in \Lambda, x \in A_\lambda,$$

$$x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \overset{\text{def}}{\iff} {}^\exists \lambda \in \Lambda; x \in A_\lambda.$$

特に, $\Lambda = \mathbb{N}$ の場合, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ をそれぞれ $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$, $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ などと書く．

問 5.1 (De Morgan の定理)**.** 集合 X の部分集合の集合族 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ について, 次のことが成り立つ．

$$(1)\ \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c, \qquad (2)\ \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c.$$

区間

$a < b$ であるような実数 a, b に対し, 閉区間 $[a, b]$, 開区間 (a, b), 半開区間 $[a, b)$ および $(a, b]$ を以下で定める:

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}, \qquad (a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$
$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}, \qquad (a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}.$$

また, 無限区間 $[a, +\infty), (a, +\infty), (-\infty, a], (-\infty, a)$ も同様に定める.

問 5.2. 次の集合を 1 つの集合で表せ (証明も与えること)．

$$(1)\ \bigcup_{n=1}^\infty (-n, n) \quad (2)\ \bigcup_{n=1}^\infty \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \quad (3)\ \bigcap_{n=1}^\infty \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \quad (4)\ \bigcap_{n=1}^\infty \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

定義(直積集合)

2 つの元 a と b に対して, (どちらが前であるかの順序まで考えた) 対 (a, b) を a と b の**順序対**(ordered pair) とよぶ．すなわち, $a \neq b$ のとき, $(a, b) \neq (b, a)$ である．順序対 (a, b) と (a', b') が等しいことを, $a = a'$ かつ $b = b'$ で定め, $(a, b) = (a', b')$ と書く.

集合 A, B に対し, A の元と B の元の順序対全体の集合を集合 A, B の**直積**(direct product) または**直積集合**(Cartesian product) と呼び, $A \times B$ と表す.

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

問 5.3. $A_1, A_2, \ldots, A_m,\ B_1, B_2, \ldots, B_n$ を集合とする．このとき次が成り立つことを示せ．

$$(1)\quad \left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) \times \left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right) = \bigcup_{(i,j)=(1,1)}^{(m,n)} (A_i \times B_j),$$

$$(2)\quad \left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right) \times \left(\bigcap_{j=1}^{n} B_j\right) = \bigcap_{(i,j)=(1,1)}^{(m,n)} (A_i \times B_j).$$

6　写像, 像, 逆像

定義 (写像)

X, Y を空でない集合とする．X の各元に対して, Y の元をそれぞれ 1 つ対応させる規則 f が与えられたとき, この規則 f を集合 X から集合 Y への
写像(mapping) という．f が X から Y への写像であることを

$$f : X \to Y$$

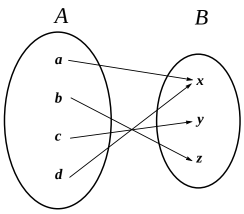
と表す．このとき, X を**定義域** (domain) または**始域** (source), Y を**終域** (target) という．写像 f によって $x \in X$ に対応する Y の元を $f(x)$ と表し, これを x の f による**像** (image) という．どのように定まる写像なのかを明示したい場合には

$$\begin{array}{cccc} f: & X & \to & Y \\ & \cup\!\!\!\!\raisebox{0pt}{} & & \cup \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

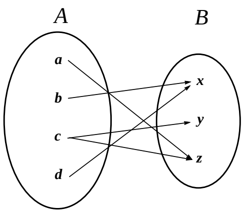
などと書く．写像 $f : X \to Y$ の値の集合 $\{f(x) \mid x \in X\}(\subset Y)$ を写像 f の**値域** (range) という．

問 6.1. $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{x, y, z\}$ とし, $f : A \to B$ を次の図でそれぞれ定義するとき, f が写像であるかどうかを判定せよ．

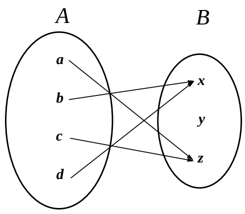
(1)



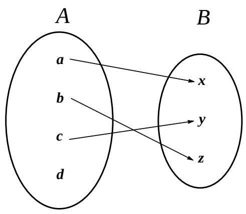
(2)



(3)



(4)



問 6.2. 次の (1) から (6) について, 対応規則 f が写像であるかどうかを判定せよ．

(1) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を $f(n) = n + 1$ で定める．

(2) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を $f(n) = n - 1$ で定める．

(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = 1/(x^2 - 1)$ で定める．

(4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ で定める．

(5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x)$ は x の平方根と定める．

定義 (像, 逆像)

写像 $f : X \to Y$ に対し, X の部分集合 A の f による**像** (image) を

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

と定義する. また, Y の部分集合 B の f による**逆像** (inverse image) を

$$f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\}$$

と定義する：

$$\begin{aligned} y \in f(A) &\iff {}^\exists x \in A \text{ s.t. } y = f(x) \\ x \in f^{-1}(B) &\iff f(x) \in B \end{aligned}$$

問 6.3. $\{a, b, c\}$ から $\{1, 2\}$ への写像 f を, $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 1$ と定める.

(1) $\{a\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$ に対して, f によるその像を求めよ.

(2) $\{1, 2\}$ のすべての部分集合に対して, f によるその逆像を求めよ.

問 6.4. (1) 開区間 $(0, \infty)$ から $(0, \infty)$ への写像 f を, $f(x) = 1/x^2$ と定める. このとき, $f((0, 1])$ と $f^{-1}([1, 2))$ を求めよ.

(2) 写像 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $g(x) = 2x/(x^2 + 1)$ で定める. このとき, $g([-1, 2))$, $g^{-1}([1, 2])$ を求めよ.

問 6.5. $f : X \to Y$ を写像とし, A, A_1, A_2 を X の部分集合, B, B_1, B_2 を Y の部分集合とする. このとき次を示せ.

(1) $A_1 \subset A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$,

(2) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$,

(3) $A \subset f^{-1}(f(A))$,

(4) $B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$,

(5) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$,

(6) $f(f^{-1}(B)) \subset B$,

問 6.6. 上の (2), (3), (6) について, ”=”とならない例をあげよ.

問 6.7. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^3 - 3x + 2$ で定める. このとき, f の次の像, 逆像を求めよ.

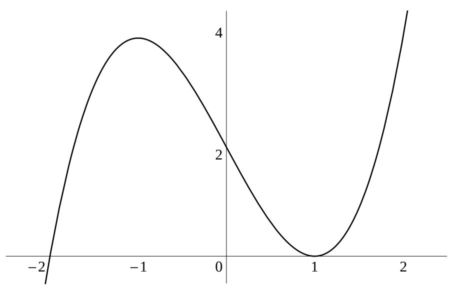
(1) $f(\{-2, 0, 1\})$

(2) $f((-\infty, 1])$

(3) $f^{-1}(\{4\})$

(4) $f^{-1}((-\infty, 2])$

(5) $f^{-1}(f([1, 2)))$



7　全射, 単射, 合成写像, 逆写像

定義 (全射, 単射, 全単射)

f を集合 X から集合 Y への写像とする.

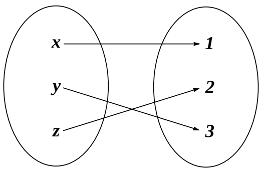
(1)
$$^\forall y \in Y,\ ^\exists x \in X \text{ s.t. } f(x) = y$$
が成り立つとき, f を**全射** (surjection) とよぶ.

(2) $x, x' \in X$ に対して
$$x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$$
が成り立つとき, f を**単射** (injection) とよぶ. 上は
$$f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$$
と同値であることに注意.

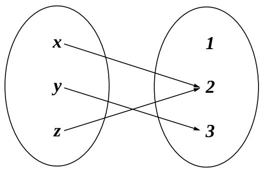
(3) f が全射かつ単射のとき, **全単射** (bijection) とよぶ.

問 7.1. 次の写像がそれぞれ全射か単射かどちらでもないかを判定せよ.

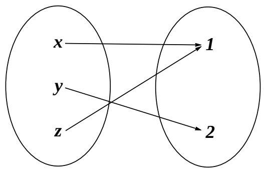
(1)



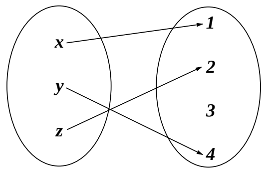
(2)



(3)



(4)



問 7.2. 次のそれぞれ写像が全射か単射かどちらでもないかを判定せよ.

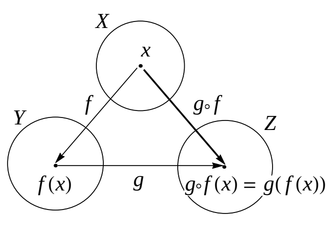
(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f(x) = x^2$　(2) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\quad f(x) = x^2$

(3) $f : \mathbb{R} \to [0, \infty),\quad f(x) = x^2$　(4) $f : [0, \infty) \to [0, \infty),\quad f(x) = x^2$

問 7.3. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = 3x + 2$ と定める. このとき f は全単射であることを定義に従って示せ.

定義 (合成写像)

f を集合 X から集合 Y への写像, g を集合 Y から Z への写像とする. X の各元 x に対して, x の f による像 $f(x)$ の g による像 $g(f(x))$ を対応させる, X から Z への写像を写像 f と g の**合成写像** (composite mapping) といい, 記号で $g \circ f$ と表す.



$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$

問 7.4. 写像 f, g をそれぞれ

$$f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{x}{x+1},\qquad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad g(y)=y^2-1$$

と定める．このとき, 合成写像 $g\circ f$, $f\circ g$ が定義できるかどうかを判定せよ．定義できる場合はどのような写像かを求め, 定義できない場合はその理由を述べよ．

問 7.5. 2 つの写像 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ の合成に関してつぎが成り立つことを (定義に従って) 示せ．

(1) f と g がともに単射ならば, $g\circ f$ は単射である．

(2) f と g がともに全射ならば, $g\circ f$ は全射である．

(3) $g\circ f$ が単射ならば, f は単射である．

(4) $g\circ f$ が全射ならば, g は全射である．

問 7.6. 写像 $f:X\to Y$ について, 次が成り立つことを示せ．

(1) $f\circ g=\mathrm{id}_Y$ となる写像 $g:Y\to X$ が存在するならば, f は全射である．

(2) $g\circ f=\mathrm{id}_X$ となる写像 $g:Y\to X$ が存在するならば, f は単射である．

(3) f が全単射であることの必要十分条件は, $g\circ f=\mathrm{id}_X$ かつ $f\circ g=\mathrm{id}_Y$ となる写像 $g:Y\to X$ が存在することである．

ただし, id_X, id_Y はそれぞれ恒等写像

$$\mathrm{id}_X:X\to X,\quad \mathrm{id}_X(x)=x,\qquad \mathrm{id}_Y:Y\to Y,\quad \mathrm{id}_Y(y)=y$$

である．

定義 (逆写像)

$f:X\to Y$ が全単射であるとき, Y の任意の元 y に対して $f(x)=y$ となる元 x が唯一つ存在する．そこで, $y\in Y$ に対して $f(x)=y$ となる唯一つの元 $x\in X$ を対応させることによって, Y から X への写像が定まる．この写像を写像 f の**逆写像** (inverse mapping) といい, 記号で

$$f^{-1}:Y\to X$$

と表す．

問 7.7. $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $a<b$, $c<d$ に対して, 閉区間 $[a,b]$ から閉区間 $[c,d]$ への写像 f を

$$f(x)=\frac{d-c}{b-a}(x-a)+c$$

と定めるとき, 逆写像 f^{-1} を求めよ．

2 つの写像 $f:X\to Y$, $g:Z\to W$ について, $X=Z$, $Y=W$ および

$$^{\forall}x\in X(=Z),\ f(x)=g(x)$$

が成り立つとき, f と g は等しいといい, $f=g$ と書く．

問 7.8. 全単射 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ に関して, 以下を示せ.

$$(1)\ (f^{-1})^{-1} = f \quad (2)\ (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

基礎数学演習テスト

次の$\boxed{1}$から$\boxed{4}$の問の答えよ.

$\boxed{1}$ X, Y を集合, f を X から Y への写像とする. 次の定義を述べよ.

(1) $X = Y$

(2) $A \subset X$ に対し, $y \in f(A)$

(3) $B \subset Y$ に対し, $x \in f^{-1}(B)$

(4) f が単射

(5) f が全射

$\boxed{2}$ A, B, C を集合とする. このとき, 次の命題 (i),(ii),(iii) は互いに同値であることを示せ.

$$\text{(i) } A \subset B \cup C, \quad \text{(ii) } (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \emptyset, \quad \text{(iii) } A \setminus B \subset C$$

$\boxed{3}$ 0 以上の整数全体の集合を $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ と表す. $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ から $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ への写像 f を

$$f(n) = \left[\frac{n}{5}\right]$$

と定める. ただし, $\left[\dfrac{n}{5}\right]$ は $\dfrac{n}{5}$ 以下の最大の整数を表わす. このとき, 次の問に答えよ.

(1) 像 $f(\{3, 9, 27\})$ と逆像 $f^{-1}(\{1, 2\})$ を求めよ.

(2) f は全射か単射か, あるいは全単射かを判定せよ.

(3) $A = \{5m \mid m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ とする. f の定義域を A に制限した写像 $f|_A : A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について, 全射か単射か, あるいは全単射かを判定せよ.

$\boxed{4}$ 集合 X, Y に対し, Y^X で X から Y への写像全体の集合を表す. すなわち,

$$Y^X := \{f \mid f : X \to Y\}.$$

Z を空でない集合とする. $f : X \to Y$ が与えられたとき, Z^Y から Z^X への写像 F を

$$F(g) = g \circ f$$

と定める. このとき次の (1),(2) を示せ.

(1) f が全射ならば F は単射である.

(2) f が単射ならば F は全射である.

8　補充問題

A, B を集合とする．

問 8.1. 次が成り立つことを示せ．

$$^{\exists}f : A \to B : \text{単射} \iff {}^{\exists}g : B \to A : \text{全射}.$$

問 8.2. $f : A \to B$ を写像, $A_1, A_2 \subset A$, $B_1, B_2 \subset B$ とする．このとき次の問に答えよ．

(1) $f(A_1) \setminus f(A_2) \subset f(A_1 \setminus A_2)$ を示せ．
(2) $f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \setminus B_2)$ を示せ．
(3) (1) について, $f(A_1) \setminus f(A_2) \subsetneqq f(A_1 \setminus A_2)$ となる例を挙げよ．

以下では, $\sharp A$ で A の元の個数を表わす．

問 8.3. $\sharp A = m$, $\sharp B = n$ とする．このとき, つぎのことを示せ．

(1) $^{\exists}f : A \to B$:単射 $\iff m \leq n$
(2) $^{\exists}f : A \to B$:全射 $\iff m \geq n$
(3) $^{\exists}f : A \to B$:全単射 $\iff m = n$

問 8.4. $\sharp A = n$ のとき, $\sharp 2^A = 2n$ であることを示せ．ただし 2^A は A のべき集合である．

問 8.5. 次が成り立つことを証明せよ．

(1) $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} [n, n+1] = [0, \infty)$
(2) $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} (n, n+1) = (0, \infty) \setminus \mathbb{N}$
(3) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] = [-1, 1]$
(4) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = (-1, 1)$
(5) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] = \{0\}$
(6) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$
(7) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right] = (0, 2]$
(8) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right) = (0, 2)$
(9) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right] = \{1\}$

(10) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)=\emptyset$

(11) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right]=[1,2]$

(12) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right]=(1,2]$

参考文献

[1] 鎌田 正良, 集合と位相, 近代科学社, 1989.

[2] 福田 拓生, 集合への入門 [無限をかいま見る], 培風館, 2012.

[3] 松坂 和夫, 集合・位相入門, 岩波書店, 1968.