微分方程式の一般解の求め方

1 はじめに

- **微分方程式**とは,

  未知関数とその導関数を含む方程式

  のことである. 例えば, f を未知関数としたとき
  $$f'(x) = f(x)$$
  は微分方程式である. 上の x のような未知関数の変数を独立変数とよぶ.
- 微分方程式に含まれる導関数の最高階をその微分方程式の**階数**という.
- 以下では, 特に断りがない限り, 独立変数を x, 未知関数を y で表す. 上の例は $y' = y$ と書ける. ここで, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ である.
- 微分方程式を満たす関数をその微分方程式の**解**といい, 解を求めることを微分方程式を解くという. 次の 2 点に注意しておく:
  - 解が存在しても解けないこと (具体的な式で表せないこと) がある.
  - 解は基本的に一意的ではない.
- 多くの場合, 任意定数を用いて解の「ほとんど」を 1 つの式に表すことができる. そのような形で表された解を**一般解**という. これに対して, 個々の解のことを**特殊解**という.

  例えば, 微分方程式
  $$y' = 2x$$
  の一般解 y は, (両辺積分して)
  $$y = x^2 + C \qquad (C \text{ は任意定数})$$
  で与えられる. $y = x^2$ や $y = x^2 - 1$ は特殊解である.

  また, 一般解として表されない解を**特異解**という.

微分方程式にはいくつかの形があり, それぞれ解き方が異なる. 本稿では次の形を扱う:

(1) 変数分離形
(2) 同次形
(3) 1 階線形微分方程式 (同次方程式)
(4) 1 階線形微分方程式 (非同次方程式)
(5) ベルヌーイの微分方程式
(6) リッカチの微分方程式
(7) 完全微分方程式
(8) 積分因子
(9) 高階微分方程式 (y を含まない)
(10) 高階微分方程式 (x を含まない)
(11) 定数係数高階線形微分方程式 (同次方程式)
(12) 定数係数高階階線形微分方程式 (非同次形方程式)

2　微分方程式とその解き方

2.1　変数分離形

変数分離系微分方程式の解き方

$$y' = f(x)g(y)$$

の形をした微分方程式を**変数分離系**とよぶ.

[解き方] 上において, $g \neq 0$ とすると

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{g(y)} =& f(x) \\
\therefore\ \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} =& f(x) \\
\therefore\ \int \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx}dx =& \int f(x)dx \qquad (\because\ x \text{ について積分}) \\
\therefore\ \int \frac{1}{g(y)}dy =& \int f(x)dx. \qquad (\because\ \text{置換積分公式})
\end{aligned}$$

上の積分を計算して一般解を求める.

例 **2.1.**

$$(1+x^3)y' - x^2y = 0$$

を解け.

解答. 式変形すると

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{y} =& \frac{x^2}{1+x^3} \\
\therefore\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} =& \frac{x^2}{1+x^3}
\end{aligned}$$

両辺 x について積分して

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{y}dy =& \int \frac{x^2}{1+x^3}dx \\
\therefore\ \log|y| =& \frac{1}{3}\int \left(\log(1+x^3)\right)' dx + C_1 \\
\therefore\ \log|y| =& \log(1+x^3)^{\frac{1}{3}} + C_1 \\
\therefore\ |y| =& (1+x^3)^{\frac{1}{3}}e^{C_1} \\
\therefore\ y =& e^{C_1}(1+x^3)^{\frac{1}{3}} \\
\therefore\ y =& C(1+x^3)^{\frac{1}{3}}. \qquad (\text{ただし},\ C = e^{C_1})
\end{aligned}$$

$y = 0$ も解なので,

$$y = C(1+x^3)^{\frac{1}{3}}.$$

□

2.2 同次形

同次形の解き方

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

の形の微分方程式を**同次形**という.

[解き方] $\dfrac{y}{x} = u$ とおくと, $y = xu$. 両辺を x で微分すると, $y' = u + xu'$ であるので, これらを上に代入すると,

$$\begin{aligned} & u + xu' = f(u) \\ \therefore\ & \frac{1}{f(u) - u} u' = \frac{1}{x} \\ \therefore\ & \int \frac{1}{f(u) - u} du = \int \frac{1}{x} dx. \end{aligned}$$

これを解いて u と x の関係式を求め, u に $\dfrac{y}{x}$ を代入して一般解を求める.

例 **2.2.**

$$y^2 + (x^2 - xy)y' = 0$$

を解け.

解答.

$x \neq 0$ とすると, 両辺を x^2 で割って,

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(1 - \frac{y}{x}\right) y' = 0$$

$\dfrac{y}{x} = u$ とおくと, $y' = u'x + u$ なので

$$\begin{aligned} & u^2 + (1-u)(u'x + u) = 0. \\ \therefore\ & (1-u)u'x + u = 0 \\ \therefore\ & \left(\frac{1}{u} - 1\right) u' = -\frac{1}{x} \\ \therefore\ & \int \left(\frac{1}{u} - 1\right) du = -\int \frac{1}{x} dx \\ \therefore\ & \log|u| - u = -\log|x| + C_1 \\ \therefore\ & \log|u| + \log|x| = u + C_1 \\ \therefore\ & \log|y| = \frac{y}{x} + C_1 \\ \therefore\ & |y| = e^{\frac{y}{x}} e^{C_1} \\ \therefore\ & y = Ce^{\frac{y}{x}}, \qquad (\text{ただし}, \ C = \pm e^{C_1}) \end{aligned}$$

$x = 0$ のときは $y = 0$. □

2.3　1 階線形微分方程式 (同次方程式)

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

の形をした微分方程式を 1 **階線形微分方程式**とよぶ. 特に,

$$y' + P(x)y = 0$$

を**同次方程式**とよび, そうでない場合を**非同次方程式**とよぶ.

同次方程式の解き方

$$y' + P(x)y = 0$$

は変数分離系なので前節の方法で解くことができる.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -P(x)y \\ \therefore \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= -P(x) \end{aligned}$$

両辺 x で積分すると

$$\int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx$$

ただし, $\int P(x)dx$ は $P(x)$ の原始関数の一つとする. よって

$$\begin{aligned} \log|y| &= -\int P(x)dx + C \\ \therefore \quad |y| &= e^{-\int P(x)dx + C} = e^C e^{-\int P(x)dx} \\ \therefore \quad y &= \pm e^C e^{-\int P(x)dx} \end{aligned}$$

$\pm e^C$ をあらためて任意定数 C とおいて

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

2.4　1 階線形微分方程式 (非同次形)

非同次方程式の解き方

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{2}$$

を考える．一般解を

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx} \tag{3}$$

の形から探す．上の両辺を微分すると，

$$y' = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)e^{-\int P(x)dx}P(x) = e^{-\int P(x)dx}(C'(x) - C(x)P(x))$$

となる．これと $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$ を (2) に代入すると，

$$e^{-\int P(x)dx}(C'(x) - C(x)P(x)) + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

ゆえに，

$$e^{-\int P(x)dx}C'(x) = Q(x) \qquad \therefore\ C'(x) = e^{\int P(x)dx}Q(x)$$

を得る．この両辺を積分すると

$$C(x) = \int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + C.$$

これを (3) に代入すると

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + C\right).$$

例 **2.3.**

$$y' + y\cos x = e^{-\sin x}$$

を解け．

解答．

$$\begin{aligned}
y =& e^{-\int \cos x dx}\left(\int e^{\int \cos x dx}e^{-\sin x}dx + C\right)\\
=& e^{-\sin x}\left(\int e^{\sin x}e^{-\sin x}dx + C\right)\\
=& e^{-\sin x}\left(\int dx + C\right)\\
=& e^{-\sin x}(x + C)\\
=& xe^{-\sin x} + Ce^{-\sin x}
\end{aligned}$$

□

2.5　ベルヌーイの微分方程式

ベルヌーイの微分方程式の解き方

$n \in \mathbb{Z}$ として

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

の形の微分方程式を考える．$n = 0$ ならば 1 階線形, $n = 1$ ならば 1 階同次線形なので $n \neq 0, 1$ とする．このとき, $y^{1-n} = u$ とおくと, $u' = (1-n)y^{-n}y'$ より,

$$u' =(1-n)y^{-n}(Q(x)y^n - P(x)y).$$

よって

$$u' + (1-n)P(x)u =(1-n)Q(x)$$

となり, u についての 1 階線型方程式となる.

例 **2.4.**

$$y' + y = xy^3$$

を解け.

解答. $n = 3$ のベルヌーイの微分方程式なので, $y^{-2} = u$ とおくと, $u' = -2y^{-3}y'$ より,

$$\begin{aligned} & u' = -2y^{-3}(xy^3 - y) \\ \therefore\ & u' = -2x + 2y^{-2} \\ \therefore\ & u' - 2u = -2x. \end{aligned}$$

これは非同次形なので,

$$\begin{aligned} & u = e^{-\int(-2)dx}\left(\int e^{\int(-2)dx}(-2x)dx + C\right) \\ \therefore\ & u = e^{2x}\left(\int(-2x)e^{-2x}dx + C\right) \\ \therefore\ & u = e^{2x}\left(\int x(-2e^{-2x})dx + C\right) \\ \therefore\ & u = e^{2x}\left(xe^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + C\right) \\ \therefore\ & u = x + \frac{1}{2} + Ce^{2x} \\ \therefore\ & u = \frac{2x + 1 + 2Ce^{2x}}{2} \\ \therefore\ & y^2 = \frac{2}{1 + 2x + Ce^{2x}} \qquad (2C \text{ を再び } C \text{ とおいた}) \end{aligned}$$

また, $y = 0$ も解の一つである. □

2.6　リッカチの微分方程式

リッカチの微分方程式の解き方

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

の形の微分方程式を考える．この微分方程式の解の一つを y_1 とする．このとき, $y = y_1 + u$ とおいて上に代入すると, $y' = y_1' + u'$ より

$$y_1' + u' = P(x)(y_1^2 + 2y_1 u + u^2) + Q(x)(y_1 + u) + R(x),$$

ここで, $y_1' = P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x)$ より

$$u' = P(x)(2y_1 u + u^2) + Q(x)u.$$

よって, u についてのベルヌーイの微分方程式

$$u' - (2P(x)y_1 + Q(x))u = P(x)u^2$$

が得られる．

例 2.5.

$$y' + \frac{x}{x-1} - \frac{2x-1}{x-1}y + y^2 = 0 \qquad (\text{ただし，} y = 1 \text{ は解の一つである})$$

を解け．

解答. $y = 1 + u$ とおくと, $y' = u'$ より

$$u' + \frac{x}{x-1} - \frac{2x-1}{x-1}(1+u) + (1+u)^2 = 0,$$

ここで, $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2x-1}{x-1} + 1 = 0$ より,

$$u' - \frac{2x-1}{x-1}u + 2u + u^2 = 0$$

$$u' - \frac{1}{x-1}u = -u^2$$

$u^{-1} = v$ とおくと, $v' = -u^{-2}u'$ より

$$
\begin{aligned}
v' &= -u^{-2}\left(-u^2 + \frac{1}{x-1}u\right) \\
\therefore\ v' &+ \frac{1}{x-1}v = 1 \\
\therefore\ v &= e^{-\int \frac{1}{x-1}dx}\left(\int e^{\int \frac{1}{x-1}dx}dx + C\right) \\
\therefore\ v &= e^{-\log(x-1)}\left(\int e^{\log(x-1)}dx + C\right) \\
\therefore\ v &= \frac{1}{(x-1)}\left(\int (x-1)dx + C\right) \\
\therefore\ v &= \frac{1}{(x-1)}\left(\frac{(x-1)^2}{2} + C\right) \\
\therefore\ v &= \frac{x-1}{2} + \frac{C}{x-1} \\
\therefore\ u &= \frac{1}{v} = \frac{1}{\frac{(x-1)^2+C}{2(x-1)}} = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+C} \\
\therefore\ y &= u + 1 = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+C} + 1.
\end{aligned}
$$

$\square$

2.7 完全微分方程式

任意の 1 階微分方程式は

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

の形に書くことができる．上の左辺がある関数の全微分に等しいとき, この形の微分方程式は**完全微分方程式**と呼ばれる．与えられた微分方程式が完全かどうかは次の定理により判定できる．

定理 2.1. 微分方程式

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \text{ が完全微分方程式} \iff P_y(x,y) = Q_x(x,y).$$

ただし, P_y, Q_x はそれぞれ P, Q の y, x に関する偏微分である．

完全微分方程式の解き方

完全微分方程式

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

の一般解は

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C$$

または

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C \qquad (C \text{ は任意定数})$$

で与えられる．ただし, x_0, y_0 はそれぞれ定義域内の定数とするが, 特に指定されていない場合は $x_0 = y_0 = 0$ としてよい．

例 2.6.

$$(5xy^4 + x)dx - (2 + 3y^2 - 10x^2y^3)dy = 0$$

を解け．

解答.

$$P(x,y) = 5xy^4 + x, \qquad Q(x,y) = -2 - 3y^2 + 10x^2y^3$$

とおくと

$$P(x,y)_y = 20xy^3, \qquad Q_x(x,y) = 20xy^3$$

なので, これは完全微分方程式である．よって

$$\int_0^x P(x,y)dx + \int_0^y Q(0,y)dy = C$$

$$\therefore \int_0^x 5xy^4 + xdx - \int_0^y 2 + 3y^2 dy = C$$

$$\therefore \frac{5}{2}x^2y^4 + \frac{1}{2}x^2 - 2y - y^3 = C.$$

□

2.8 積分因子

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

の形の微分方程式で

$$P_y(x,y) \neq Q_x(x,y)$$

である場合を考える．このとき, ある関数 $\mu(x,y)$ で

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0 \quad \text{かつ} \quad \mu_y(x,y)P_y(x,y) = \mu_x(x,y)Q_x(x,y)$$

を満たすものを見つけることができれば, 完全微分方程式と同様に解くことができる．このような関数 $\mu(x,y)$ を**積分因子**と呼ぶこととする．積分因子を見つけることは一般には困難であるが, 次のことが知られている:

積分因子の見つけ方

完全でない微分方程式

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

において, 積分因子 $\mu(x,y)$ は

(i) $\dfrac{P_y(x,y) - Q_x(x,y)}{Q(x,y)}$ が x のみ含む場合.

$$\varphi(x) = \frac{P_y(x,y) - Q_x(x,y)}{Q(x,y)} \text{とおくと，} \mu(x,y) = e^{\int \varphi(x)dx}.$$

(ii) $\dfrac{P_y(x,y) - Q_x(x,y)}{P(x,y)}$ が y のみ含む場合.

$$\psi(y) = \frac{P_y(x,y) - Q_x(x,y)}{P(x,y)} \text{とおくと，} \mu(x,y) = e^{-\int \psi(y)dy}.$$

例 2.7.

$$(y^4 + 2y)dx + (xy^3 + 2y^4 - 4x)dy = 0$$

を解け.

解答.

$$P(x,y) = y^4 + 2y, \qquad Q(x,y) = xy^3 + 2y^4 - 4x$$

とおくと,

$$P_y(x,y) = 4y^3 + 2, \qquad Q_x(x,y) = y^3 - 4$$

となるので完全微分方程式でない．今,

$$\psi(y) = \frac{P_y(x,y) - Q_x(x,y)}{P(x,y)} = \frac{4y^3 + 2 - y^3 + 4}{y^4 + 2y} = \frac{3(y^3+2)}{y(y^3+2)} = \frac{3}{y}$$

とすると, 積分因子は

$$\mu(y) = e^{-\int \psi(y)dy} = e^{-\int \frac{3}{y}dy} = e^{-3\log y} = y^{-3}$$

となる．よって, 問題の方程式の両辺に $\mu(y)$ をかけた

$$(y+2y^{-2})dx+(x+2y-4xy^{-3})dy=0$$

は完全微分方程式であるので, その一般解は

$$\int_0^x (y+2y^{-2})dx+\int_0^y 2ydy=C$$

$$\therefore\ xy+2xy^{-2}+y^2=C.$$

□

2.9　高階微分方程式 (y を含まない方程式)

一般に, 高階微分方程式は, $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ の関係式として

$$f(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0$$

とあらわすことができる. ここでは 2 階のみ扱うが, 高階でも同様である.

2 階微分方程式の解き方 (y を含まない場合)

$$f(x, y', y'') = 0$$

の形の微分方程式は, $y' = p$ とおけば $y'' = p'$ より, 上は 1 階の微分方程式 $f(x, p, p') = 0$ となる.

例 **2.8.**

$$xy'' + y' = 4x$$

を解け.

解答. $y' = p$ とおくと,

$$xp' + p = 4x.$$

$x \neq 0$ とすると,

$$\begin{aligned}
& p' + \frac{1}{x}p = 4 \\
\therefore \quad & p = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left(\int 4e^{\int \frac{1}{x}dx}dx + C\right) \\
\therefore \quad & p = e^{-\log x}\left(4\int e^{\log x}dx + C\right) \\
\therefore \quad & p = \frac{1}{x}\left(4\int xdx + C\right) \\
\therefore \quad & p = \frac{1}{x}\left(2x^2 + C\right) = 2x + \frac{C}{x}.
\end{aligned}$$

$y' = p$ の両辺を x について積分すると,

$$y = \int pdx + C' = x^2 + C\log x + C'.$$

□

2.10 高階微分方程式 (x を含まない方程式)

2 階線形微分方程式の解き方 (x を含まない場合)

$$f(y, y', y'') = 0$$

の形の微分方程式は, $y' = p$ とおくと,

$$y'' = p' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p$$

より, 元の微分方程式は, y を独立変数として, 1 階微分方程式 $f\left(y, p, \dfrac{dp}{dy}p\right) = 0$ となる.

例 **2.9.**

$$(1+y)y'' + (y')^2 = 0$$

を解け.

解答. $y' = p$ とおくと, $y'' = \dfrac{dp}{dy}p$ より,

$$(1+y)\frac{dp}{dy}p + p^2 = 0$$

$p \neq 0$ とすると,

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dy} = -\frac{1}{1+y}$$

両辺 y で積分すると

$$\begin{aligned}
\therefore \quad & \log|p| = -\int \frac{1}{1+y}dy + C \\
\therefore \quad & \log|p| = -\log(1+y) + C \\
\therefore \quad & |p| = e^C \frac{1}{1+y} \\
\therefore \quad & y' = p = C\frac{1}{1+y} \\
\therefore \quad & y = \frac{C}{1+y}x + C'.
\end{aligned}$$

$p = 0$ のとき, $y' = 0$ は方程式を満たすので

$$y = C. \quad (C : \text{定数})$$

□

2.11 定数係数高階線形微分方程式 1(同次方程式)

定数 $p_1, p_2, \ldots, p_n$, ある区間 I 上で定義された関数 f が与えられたとき,

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = f(x)$$

を**定数係数 n 階線形微分方程式**と呼ぶ. 特に $f(x) \equiv 0$ の場合を**同次方程式**, それ以外を非同次方程式という.

同次方程式の一般解を求めるには, 次の定理が基本となる: まず 2 階の場合を考える.

定理 2.2.

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (p, q \text{ は定数})$$

の特殊解 y_1, y_2 は次のようになる:

(i) $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ が相異なる 2 解 α, β をもつならば, 特殊解は

$$y_1 = C_1 e^{\alpha x}, \quad y_2 = C_2 e^{\beta x}. \qquad (C_1, C_2 \text{は任意定数})$$

(ii) $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ が重根 α をもつならば, 特殊解は

$$y_1 = C_1 e^{\alpha x}, \qquad y_2 = C_2 x e^{\alpha x}. \qquad (C_1, C_2 \text{は任意定数})$$

(iii) p, q が実定数で, $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ が虚根 $a \pm ib$ $(a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0)$ をもつならば, 特殊解は

$$y_1 = C_1 e^{ax} \cos bx, \qquad y_2 = C_2 e^{ax} \sin bx. \qquad (C_1, C_2 \text{は任意定数})$$

定理 2.3. y_1, y_2 を 2 個の関数とする. これらに関するロンスキアン $W(y_1, y_2)$ を

$$W(y_1, y_2) := \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$$

と定義する. このとき次が成り立つ:

$$W(y_1, y_2) \neq 0 \implies y_1, y_2 \text{は一次独立}.$$

定理 2.4. 定数係数 n 階同次線形微分方程式

$$y'' + py' + qy = 0$$

の 1 次独立な 2 個の特殊解を y_1, y_2 とすると, 一般解は

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

で与えられる.

定理 2.5 (3 階同次方程式の特殊解)**.**

$$y''' + py'' + qy' + ry = 0 \qquad (p, q, r \text{ は定数})$$

の特殊解 y_1, y_2, y_3 は次のようになる:

特性方程式 $\lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + r = 0$ が

(i) 相異なる 3 解 α, β, γ をもつならば, 特殊解は

$$y_1 = C_1 e^{\alpha x}, \quad y_2 = C_2 e^{\beta x}, \quad y_3 = C_3 e^{\gamma x}. \qquad (C_1, C_2, C_3 \text{は任意定数})$$

(ii) 解 α, β, β をもつならば, 特殊解は

$$y_1 = C_1 e^{\alpha x}, \quad y_2 = C_2 e^{\beta x}, \quad y_3 = C_3 x e^{\beta x}. \quad (C_1, C_2, C_3 \text{は任意定数})$$

(iii) 重解 α をもつならば, 特殊解は

$$y_1 = C_1 e^{\alpha x}, \quad y_2 = C_2 x e^{\alpha x}, \quad y_3 = C_3 x^2 e^{\alpha x}. \quad (C_1, C_2, C_3 \text{は任意定数})$$

(iv) p, q, r が実定数で, 特性方程式が実数解 α と共役な虚数解 $\beta \pm i\gamma$ $(\beta, \gamma \neq 0 \in \mathbb{R})$ をもつならば, 特殊解は

$$y_1 = C_1 e^{\alpha x}, \quad y_2 = C_2 e^{\beta x} \cos \gamma x, \quad y_3 = C_3 e^{\beta x} \sin \gamma x. \qquad (C_1, C_2, C_3 \text{は任意定数})$$

定理 2.6. y_1, y_2, y_3 を 3 個の関数とする. これらに関するロンスキアン $W(y_1, y_2, y_3)$ を

$$W(y_1, y_2, y_3) := \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{pmatrix}$$

と定義する. このとき次が成り立つ:

$$W(y_1, y_2, y_3) \neq 0 \implies y_1, y_2, y_3 \text{は一次独立.}$$

定理 2.7. 定数係数 3 階同次線形微分方程式

$$y''' + py'' + qy' + ry = 0$$

の 1 次独立な 3 個の特殊解を y_1, y_2, y_3 とすると, 一般解は

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$$

で与えられる.

例 2.10.

$$y''' - 3y' + 2y = 0$$

を解け.

解答. 特性方程式 $\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$ をとくと

$$(\lambda - 1)^2 (\lambda + 2) = 0 \qquad \therefore \quad \lambda = 1 \text{ (重解)}, \ -2.$$

$$\therefore \quad y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-2x}.$$

□

2.12 定数係数 2 階線形微分方程式 (非同次方程式)

この節では 2 階の非同次方程式

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{4}$$

を考える. これに対して,

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{5}$$

を非同次方程式の同伴方程式という.

非同次方程式の解の見つけ方

非同次方程式の一般解 = 非同次方程式の特殊解 + 同伴方程式の一般解

非同次方程式の解き方

(a) 同伴方程式 (5) の特殊解 y_1, y_2 が分かっているとき, 非同次方程式 (4) の特殊解 y_0 は

$$y_0 = -y_1 \int \frac{y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} dx + y_2 \int \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} dx$$

となる. よって, (4) の一般解は

$$y = y_0 + C_1 y_1 + C_2 y_2$$

となる.

(b) 同伴方程式 (5) の特殊解の一つ $y_1 \neq 0$ が分かっているとき, 非同次方程式 (4) の一般解を $y = uy_1$ とおき, これと y', y'' を (4) に代入して,

$$u'' + P(x)u' = Q(x)$$

とする. さらに, $u' = p$ とおくと, p の 1 階線形微分方程式

$$p' + P(x)p = Q(x)$$

を得る. これを p について解いて u を求め, 一般解 $y = uy_1$ を求める.

例 **2.11.**

$$y'' - 5y' + 6y = e^x + e^{2x}$$

を解け.

解答. 同伴方程式 $y'' - 5y' + 6y = 0$ の特殊解 y_1, y_2 を求めると,

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0. \qquad \therefore\ (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0. \qquad \therefore\ \lambda = 2, 3$$

より $y_1 = C_1 e^{2x}$, $y_2 = C_2 e^{3x}$. また,

$$W(y_1, y_2) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{pmatrix} = e^{5x}$$

より, 非同次方程式の特殊解 y_0 は

$$
\begin{aligned}
y_0 =& - e^{2x}\int \frac{e^{3x}(e^x+e^{2x})}{e^{5x}}dx + e^{3x}\int \frac{e^{2x}(e^x+e^{2x})}{e^{5x}}dx \\
=& - e^{2x}\int (e^{-x}+1)dx + e^{3x}\int e^{-2x}+e^{-x}dx \\
=& - e^{2x}\int ((-e^{-x})' + x')dx + e^{3x}\int (\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)' + (-e^{-x})')dx \\
=& - e^{2x}((-e^{-x})+x) + e^{3x}\left(-\frac{e^{-2x}}{2} - e^{-x}\right) \\
=& e^x - xe^{2x} - \frac{e^x}{2} - e^{2x} \\
=& \frac{e^x}{2} - (x+1)e^{2x}.
\end{aligned}
$$

よって

$$
y = \frac{e^x}{2} - (x+1)e^{2x} + C_1e^{2x} + C_3e^{3x}.
$$

□

3　問題

[1] 次の微分方程式を解け.

(1) $xy' + y + 2x^2y = 0$

(2) $x^2 + y^2 - xyy' = 0$

(3) $y' + 2y\tan x = \sin x$

(4) $y' + 2xy = 4x^3y^3$

(5) $y' = 2x + \dfrac{1}{x}y - \dfrac{2}{x}y^2$　　(ただし, $y = x$ は解の一つである)

(6) $e^y dx + (xe^y - 3y^2)dy = 0$

(7) $(2x^2 + 3xy)dx + 3x^2 dy = 0$

(8) $xy'' + y' - x = 0$

(9) $y'' - e^y y' = 0$

(10) $y''' - 3y'' + 4y = 0$

[2] 次の微分方程式を解け.

(1) $(x^2 + x^2y)y' + xy^2 + y^2 = 0$

(2) $(x^2 - xy)y' + y^2 = 0$

(3) $(1 + x^2)y' - xy = 1$

(4) $y' - y = xy^5$

(5) $y' + \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2x-1}{x-1}y + y^2 = 0$　　(ただし, $y = 1$ は解の一つである.)

(6) $(x - y)dx + \left(\dfrac{1}{y^2} - x\right)dy = 0$

(7) $(2x^2 + 3xy)dx + 3x^2 dy = 0$

(8) $xy'' + y' = 4x$

(9) $(1 + y)y'' + (y')^2 = 0$

(10) $y''' + y'' - y' - y = 0$

(11) $y^{(4)} - y = 0$

(12) $y'' + y' - 2y = (3x + 4)e^x$

[3] 次の微分方程式を解け.

(1) $yy' + xy^2 = x$

(2) $y^2 + x^2y' - xyy' = 0$

(3) $xy' + y = x - x^3$

(4) $y' + 2xy = 4x^3y^3$

(5) $(x - 1)y' + x - (2x - 1)y + (x - 1)y^2 = 0$　　(ただし, $y = 1$ は解の一つである)

(6) $(x^4 + 12x^2y)dx + (4x^3 + y)dy = 0$

(7) $ydx + 2xdy = 0$

(8) $xy'' + y' - x = 0$

(9) $y'' - e^y y' = 0$

(10) $y''' + y'' - 2y = 0$

(11) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$

(12) $y''' - 4y'' + 4y' = 2xe^{2x}$

[4] 次の微分方程式を解け.

(1) $y\dfrac{dy}{dx} + xy^2 = x$

(2) $x^2 + y^2 - xyy' = 0$

(3) $(3x - y + 5)dx + (x + 3y - 5)dy = 0$

(4) $y' + \dfrac{1}{x}y = \log x$

(5) $y' + 2xy = 4x^3y^3$

(6) $(x^2 - x^3)y' = x(2 - x)y - y^2$ 　　(ただし, $y = x$ は解の一つである)

(7) $y^2dx + 2xydy = 0$

(8) $(y - 2y^2)dx - xdy = 0$

(9) $xy'' + y' - x = 0$

(10) $yy'' + (y')^2 - 1 = 0$

(11) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

(12) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$