数理ファイナンスの基礎

2016 年 11 月 29 日

概要

本稿では, 離散時間上で定義されるもっとも単純な金融市場モデルを構成し, 金融派生商品 (デリバティブ) の価格付け問題を考える.

1 序

本節では, 数理ファイナンスで扱われる用語や金融市場モデルの紹介を (大雑把に) 行う.

1.1 用語

- いくつかの株式 (stock) や債券 (bond) や外国為替 (foreign currency) などが流通していて売買されている市場を, **金融市場** (financial market) とよぶ.
- 株式や債券や外国為替などは, 将来の不確実性に影響を受けて価格が決まるものとし, これらを総称して**危険資産** (risky asset) とよぶ. 時間とともに不確実に推移していく危険資産の価格を**危険資産過程** (risky asset price process) とよぶ. 危険資産価格過程は確率過程の関数でモデル化する:

$$\text{危険資産価格過程} = f(\text{確率過程}).$$

  市場での売買と価格の因果関係は考慮されないものとする.
- 一方, 金融市場には, 銀行預金のような安全な運用方法があるものとする. 例えば, 年率 r, δ ごとの複利で利息がつくとすると, 時刻 0 で 1 億円を銀行に預けて運用すれば, 時刻 $n\delta$ には $B_t := (1 + \delta r)^n$ 億円に資産は確実に増えていく. このような過程を**銀行預金 (もしくは安全運用) 過程**とよび, 上の危険資産とは区別する.
- 市場参加者のうち, 投資している人のことを投資家 (investor) とよぶ. 投資家が保有している資産の組み合わせを**ポートフォリオ**とよぶ. 例えば, 投資家が
  - 株式の第 i 銘柄を $\theta^{(i)}$ 枚 $(i = 1, \ldots, m)$,
  - 銀行預金に $\theta^{(m+1)}$ 円

  保有しているならば, ポートフォリオ θ はベクトル

$$\theta := (\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \ldots, \theta^{(m+1)})$$

  で表される.

投資家が, 時間とともに自らのポートフォリオを変化させるときは, ポートフォリオは過程 (θ_t) で表され, これをポートフォリオ過程とよぶ.

数理ファイナンスでは, しばしば, どのようなポートフォリオ過程を投資家は選択すべきなのか, あるいはどんな投資の仕方 (= ポートフォリオ過程) が「最適」なのか, を議論する.

- 投資家が損失の「リスク」(=「不確実性」) を抑えるためにとる投資戦略のことを, ヘッジング (hedging) とよぶ.

1.2 ヨーロピアンデリバティブ

満期時刻 T において, 時刻 T における原資産 (債券, 株式, 為替など) の価格によって「正確に」に決定される金融契約のことを金融派生商品 (financial derivative security) という. 片仮名で**デリバティブ**と表記することも多い. デリバティブの発行者をライター (writer), もしくは売却者とよぶ.

本稿では, 次のヨーロピアンデリバティブを扱う.

満期 T, **ペイオフ** $f(S_T)$ **のヨーロピアンデリバティブ** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 次の権利のこと:
購入者が

- 満期時 T にのみ行使でき,
- 行使した際, 満期時の危険資産価格 S_T に依って定まる $f(S_T)$ の額を受け取ることができる.

いくつか例をあげる.

■先物　受け渡し日 T, 受け渡し価格 K の S の先物契約 $\overset{\text{def}}{\iff}$ 2 者間 (A と B とする) で交わされる次の (相対) 契約のこと：時刻 T で A が B に危険資産を価格 K で受け渡す.

B のペイオフは

$$F := f(S_T), \qquad \text{ただし}, \ f(x) = x - K.$$

■ヨーロピアンコールオプション
満期 T, 行使価格 K の**ヨーロピアンプットオプション** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 満期時 T に価格 K で危険資産を購入できる権利.

購入者のペイオフは

$$F := f(S_T), \qquad \text{ただし}, \ f(x) = (x - K)^+ := \max\{x - K, 0\}.$$

■ヨーロピアンプットオプション　満期 T, 行使価格 K の**ヨーロピアンプットオプション** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 満期時 T に価格 K で危険資産を購入できる権利.

購入者のペイオフは

$$F := f(S_T), \qquad \text{ただし}, \ f(x) = (K - x)^+ := \max\{K - x, 0\}.$$

次節で金融市場の数理モデルを構成し, その後, 次の問題を扱っていく：

- **価格付け問題**. ヨーロピアンデリバティブの現在での”適正な” 価格を見つけること.
- **ヘッジング問題**. ヨーロピアンデリバティブのライターが”リスク”をどう制御するかを考察し, ”最適な”ヘッジング戦略を決めること.

2　ヨーロピアンデリバティブの価格付け問題

2.1　ランダムウォークを用いた金融市場モデル

次の金融市場モデルを考える.

- 取り引き (売買) が行われる時刻を

$$\mathbb{T} := \{0, 1, \ldots, T-1, T\}, \qquad T \in \mathbb{N}$$

とする.

- 安全運用と呼ばれる, 時刻 $t = 0$ の元本 1 が, 時刻 $t \in \mathbb{T}$ には

$$B_t := (1+r)^t$$

となるような投資 (運用) 方法がひとつ存在する.

- 単位あたりの価格過程が $S := \{S_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ で表される危険資産が存在する. ここで,

$$S_{t+1} = D_{t+1} S_t, \quad S_0 > 0, \tag{2.1}$$

$\{D_t\}_{t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}}$ は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の独立同分布確率変数列で, その分布は

$$P(D_t = u) = p, \quad P(D_t = l) = 1-p, \quad 0 < l < 1 < u,\ 0 < p < 1$$

とする.

(2.1) より,

$$S_t = D_t S_{t-1} = D_t (D_{t-1} S_{t-2}) = \cdots = S_0 \prod_{i=1}^{t} D_i = S_0 e^{L_t}$$

表わされることに注意する. ここで, $L_0 = 0$,

$$L_t = \sum_{i=1}^{t} \log D_i, \qquad t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$$

である.

■1 期間モデル　まずは 1 期間モデル $(T = 1)$ を考える. C を行使価格 K のヨーロピアンプットオプションの現在価値とし, C_u, C_d をそれぞれ,

$$C_u = [uS_0 - K]_+, \quad C_d = [dS_0 - K]_+$$

とする.

この金融市場モデル上で安全運用と危険資産への投資を組み合わせて行う投資家を考える. 投資家の運用戦略を次のように設定する.

- 時刻 0 に初期運用 (資本) 額 $x(\geq 0)$ でスタートする.
- 時刻 $t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$ に危険資産を ξ_t 枚保有し, 残額は銀行に預けて安全運用する.
- 追加の資本投入, 資本流出はないものとする.

この投資戦略を**資金自己調達的戦略** (self-financing strategy) とよぶ. ここで, $\xi := \{\xi_t\}_{t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}}$ は可予測な実数値*確率過程とする. つまり, ξ_t の値 (危険資産を時刻 t で何枚保有するか) は, 時刻 t の直前までの危険資産 S の情報にのみ依存する.

* 空売り ok

定義 2.1 (資金自己調達的ポートフォリオ富過程)**.** $x \in \mathbb{R}$ と S の保有戦略過程 $\xi = \{\xi_t\}_{t\in\mathbb{T}\setminus\{0\}}$ が与えられたとき,

$$\begin{cases} X_0 = x, \\ X_t = (X_{t-1} - \xi_t S_{t-1})(1+r) + \xi_t S_t, \quad t \in \mathbb{T}\setminus\{0\} \end{cases} \tag{2.2}$$

をみたす確率過程 $X := \{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ を**資金自己調達的ポートフォリオ富過程**とよぶ[†]. また, 組 (x,ξ) を**資金自己調達ポートフォリオ**と呼ぶ. さらに, (x,ξ) を強調してしばしば X を $X^{x,\xi}$ と書く.

漸化式 (2.2) を解く. 本節以下, 過程 $A := \{A_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ に対して $\widetilde{A}_t := A_t/B_t$, $\widetilde{A} := \{\widetilde{A}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$, $\Delta\widetilde{A}_t := \widetilde{A}_t - \widetilde{A}_{t-1}$ と書く.

今,

$$\widetilde{X}_t = x + \sum_{i=1}^{t} \Delta\widetilde{X}_i$$

であるが, 一方,

$$\begin{aligned} \widetilde{X}_t = \frac{X_t}{B_t} &= \frac{(X_{t-1} - \xi_t S_{t-1})(1+r) + \xi_t S_t}{(1+r)^t} \\ &= \frac{X_{t-1}}{(1+r)^{t-1}} - \xi_t \frac{S_{t-1}}{(1+r)^{t-1}} + \xi_t \frac{S_t}{(1+r)^t} \\ &= \widetilde{X}_{t-1} - \xi_t \widetilde{S}_{t-1} + \xi_t \widetilde{S}_t \end{aligned}$$

より

$$\Delta\widetilde{X}_t = \xi_t \Delta\widetilde{S}_t.$$

よって, 次が成り立つ:

$$\widetilde{X}_t = x + \sum_{i=1}^{t} \xi_i \widetilde{S}_i.$$

したがって,

$$X_t = B_t \left(x + \sum_{i=1}^{t} \xi_i \Delta\widetilde{S}_i \right), \quad t \in \mathbb{T}$$

を得る.

投資を行わない場合は $X_t^{x,0} = xB_t$ となるので, 危険資産に対する投資から産まれる時刻 t までの累積収益 $G(\xi)_t$ は次で表される:

$$G(\xi)_t := X_t^{x,\xi} - xB_t = \begin{cases} B_t \sum_{i=1}^{t} \xi_i \Delta\widetilde{S}_i, & t \in \mathbb{T}\setminus\{0\}, \\ 0, & t = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

この過程

$$G(\xi) := \{G(\xi)_t\}_{t\in\mathbb{T}\setminus\{0\}}$$

を**収益過程**とよぶ.

---

†

$$\underbrace{(X_{t-1} - \xi_t S_{t-1})}_{\text{時刻 } t-1 \text{ で安全運用にまわした金額}} \times \overbrace{(1+r)}^{\text{期間 } [t-1,t] \text{ での預金増加率}} + \underbrace{\xi_t S_t}_{\text{時刻 } t \text{ で保有している危険資産}}$$

2.2　無裁定価格

価格付け問題における”適正な”価格とは何かを考える.

■**無裁定条件**　「元手 0 で投資を行って, 時刻 T に損をせず, かつ正の儲けをえる確率が正」である取引を裁定取引, もしくは裁定機会とよぶ. この裁定機会が存在しないということを基本原則とし, これを**無裁定条件** (no arbitrage) とよぶ.

我々は, 裁定機会が生じない価格を**無裁定価格** (arbitage-free price) とよぶことにし, これを適正価格 (fair price) として採用する.

定理 A. ヨーロピアンデリバティブのペイオフ $F = f(S_T)$ が, 元手 x^F と S の保有戦略 $\{\xi_t^F\}_{t\in\mathbb{T}\setminus\{0\}}$ を用いた資金自己調達的戦略で複製できるとする. すなわち,

$$F = X_T^{x^F,\xi^F} = B_T\left(x^F + \sum_{i=1}^{T}\xi_i^F\Delta\widetilde{S}_i\right) \tag{2.4}$$

が成り立つとする. このとき, x^F はこのデリバティブの適正価格である.

定理 B. 条件

$$l < 1 < 1 + r < u$$

を仮定する. このとき, 上の (2.4) を満たす資金自己調達的ポートフォリオが存在する.

定理 A, 定理 B の証明は次節で行う.

2.3　リスク中立確率

本節では以下,

「危険資産価格の下落率」<「安全運用による増加率」<「危険資産価格の上昇率」

を仮定する.

$$q := \frac{1+r-l}{u-l} \in (0,1) \tag{2.5}$$

とおき, 確率変数 Z を次で定義する:

$$Z(\omega) := \prod_{i=1}^{T}\left\{\frac{q}{p}1_{\{\omega;D_i=u\}}(\omega) + \frac{1-q}{1-p}1_{\{\omega;D_i=l\}}(\omega)\right\}.$$

さらに, $(\Omega,\mathcal{F}_T)$ 上に確率 Q を次で定義する:

$$Q(A) := E[Z1_A] \quad (A\in\mathcal{F}_T).$$

ここで, $E[\cdot]$ は確率測度 P に関する期待値である. この確率測度 Q を**リスク中立確率**[‡] もしくは**同値マルチンゲール測度**[§]とよぶ.

確率変数列 $\{D_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ は $(\Omega,\mathcal{F},Q)$ 上でも独立同分布確率変数列で, その分布は

$$Q(D_t = u) = q, \quad Q(D_t = l) = 1-q$$

‡ $E^Q\left[\frac{S_{t+1}-S_t}{S_t}\middle|D_1,D_2,\ldots,D_t\right] = r$ となることにちなんでこうよばれる.

§ $P(A)>0 \iff Q(A)>0$ となること, および, Q の下で $\widetilde{S}$ がマルチンゲールであることにちなんでこうよばれる

で与えられる．また，D_t の Q に関する期待値は

$$E^Q[D_t] = uQ(D_t = u) + lQ(D_{t+1} = l) = 1 + r$$

となることに注意する．

補題 2.1. $\widetilde{S} := S/B$ は Q-マルチンゲールである．

証明.

$$\begin{aligned} E^Q[\widetilde{S}_{t+1}|D_1, D_2, \ldots, D_t] &= \frac{1}{B_{t+1}} E^Q \left[D_{t+1} S_t | D_1, D_2, \ldots, D_t \right] \\ &= \frac{1}{B_{t+1}} E^Q \left[D_{t+1} \left(S_0 \prod_{i=1}^{t} D_i \right) \middle| D_1, D_2, \ldots, D_t \right] \\ &= \frac{S_t}{B_{t+1}} E^Q[D_{t+1}] = \widetilde{S}_t \end{aligned}$$

□

補題 2.2. R を $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度とする．このとき，以下の (i),(ii) は同値である．

(i) $\widetilde{S}$ が R-マルチンゲールである．

(ii) 任意の可予測過程 ξ に対して割引収益過程

$$\widetilde{G}(\xi)_t := \frac{G(\xi)_t}{B_t} = \begin{cases} B_t \sum_{i=1}^{t} \xi_i \Delta \widetilde{S}_i, & t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}, \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

は平均 0 の R-マルチンゲールである．

証明. 任意の可予測な ξ に対して次が成り立つことに注意すればよい:

$$E^R \left[\widetilde{G}(\xi)_{t+1} \middle| D_1, D_2, \ldots, D_t \right] = \widetilde{G}(\xi)_t + \xi_{t+1} \left(E^R \left[\widetilde{S}_{t+1} \middle| D_1, D_2, \ldots, D_t \right] - \widetilde{S}_t \right).$$

□

定理 A の証明. まず，x^F 以外では裁定機会が生じることを示す．このデリバティブに $x' > x^F$ なる価格が付いている場合を考える．このデリバティブを売却し得られた資金 x' を x^F と $x' - x^F$ に分け，一方を資金自己調達的戦略 (x^F, ξ^F) で運用し，もう一方を安全運用する．時刻 T におけるこの投資家の資産は

$$F + (x' - x^F)B_T > 0$$

となる．売却相手に F を支払っても資産 $(x' - x^F)B_T > 0$ が残るため，裁定機会が生じる．$x^F < x'$ の場合も同様．

次に，x^F のとき裁定機会が生じないことを背理法で示す．裁定機会が生じると仮定すると，$P \equiv Q$ より，次の (a), (b) のどちらかが，ある可予測過程 $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ に対して成り立つ:

(a) $-F + X_T^{x^F, \xi} \geq 0$ かつ $Q\left(-F + X_T^{x^F, \xi} > 0 \right) > 0$,

(b) $F + X_T^{x^F, \xi} \geq 0$ かつ $Q\left(F + X_T^{x^F, \xi} > 0 \right) > 0$.

(a) が成り立っている場合を考える．このとき，補題 2.2 より次が成り立つ:

$$E^Q \left[-F + X_T^{x^F, \xi} \right] = E^Q \left[X_T^{0, -\xi^F + \xi} \right] = B_T E^Q \left[\widetilde{G}_T \left(-\xi^F + \xi \right) \right] = 0.$$

これは裁定機会が生じることに矛盾する．(b) の場合も同様． □

定理 B の証明. (2.4) 式より,

$$\frac{F}{B_T} = \widetilde{X}_T^{x^F,\xi^F} = x^F + \widetilde{G}\left(\xi^F\right)_T.$$

両辺で Q に関する条件付き期待値をとると, 補題 2.1, 補題 2.2 より次が成り立つ:

$$E^Q\left[\frac{F}{B_T}\middle| D_1, D_2, \ldots, D_t\right] = x^F + \widetilde{G}\left(\xi^F\right)_t = \widetilde{X}_t^{x^F,\xi^F}, \quad t \in \mathbb{T}.$$

変形すると次をえる:

$$\begin{aligned}
X_t^{x^F,\xi^F} &= \frac{B_t}{B_T}E^Q\left[f(S_T)\middle| D_1, D_2, \ldots, D_t\right] \\
&= \frac{B_t}{B_T}E^Q\left[f(S_0e^{L_T})\middle| D_1D_2, \ldots, D_t\right] \\
&= \frac{B_t}{B_T}E^Q\left[f(S_0e^{\sum_{i=1}^T \log D_i})\middle| D_1D_2, \ldots, D_t\right] \\
&= \frac{B_t}{B_T}E^Q\left[f(S_0e^{\sum_{i=1}^t \log D_i}e^{\sum_{i=t+1}^T \log D_i})\middle| D_1D_2, \ldots, D_t\right] \\
&= \frac{B_t}{B_T}E^Q\left[f(S_te^{L_{T-t}})\right] &(2.6)\\
&= \frac{B_t}{B_T}\sum_{s=0}^{T-t} {}_{T-t}C_s q^s(1-q)^{T-t-s}f(u^s l^{T-t-s}S_t). &(2.7)
\end{aligned}$$

よって,

$$x^F = X_0^{x^F,\xi^F} = \frac{1}{B_T}\sum_{s=0}^{T} {}_{T}C_s q^s(1-q)^{T-s}f(u^s l^{T-s}S_0).$$

(2.7) 式を $v^F(t, S_t)$ とおき, $\widetilde{v}^F(t, S_t) := B_t^{-1}v^F(t, S_t)$ とおく. このとき,

$$\widetilde{v}^F(t, S_t) = \widetilde{v}^F(t-1, S_{t-1}) + \xi_t^F\Delta\widetilde{S}_t, \quad t \in \mathbb{T}$$

となるが, これより特に次がえられる:

$$\widetilde{v}^F(t, uS_{t-1}) = \widetilde{v}^F(t-1, S_{t-1}) + \xi_t^F\left(\frac{u}{1+r} - 1\right)\widetilde{S}_{t-1},$$
$$\widetilde{v}^F(t, lS_{t-1}) = \widetilde{v}^F(t-1, S_{t-1}) + \xi_t^F\left(\frac{l}{1+r} - 1\right)\widetilde{S}_{t-1}.$$

したがって,

$$\xi_t^F = \frac{v^F(t, uS_{t-1}) - v^F(t, lS_{t-1})}{(u-l)S_{t-1}}.$$

□

注意 C. 上の ξ_t^F を離散時間伊藤の公式を用いて求めてみる. (2.6) 式を $v^F(t, S_t)$ とおき, $\widetilde{v}^F(t, S_t) := B_t^{-1}v^F(t, S_t)$ とおく. このとき,

$$\widetilde{v}^F(t, S_t) - \widetilde{v}^F(t-1, S_{t-1}) = \xi_t^F\Delta\widetilde{S}_t, \quad t \in \mathbb{T} \tag{2.8}$$

となる.
((2.8) の右辺について)

$$\widetilde{S}_t = B_t^{-1}S_t = B_t^{-1}S_0e^{L_t} =: g(t, L_t)$$

とおき, 離散時間伊藤の公式を適用すると, $\widetilde{S}_t$ が (Q の下で) マルチンゲールなので次が成り立つ:

$$\begin{aligned}\Delta\widetilde{S}_t = g(t, L_t) - g(t-1, L_{t-1}) &= \frac{g(t, L_{t-1}+1) - g(t, L_{t-1}-1)}{2}(D_t - (p-q)) \\ &= \frac{1}{2}\left((1+r)e\widetilde{S}_{t-1} - (1+r)e^{-1}\widetilde{S}_{t-1}\right)(D_t - (p-q)) \\ &= \frac{1}{2}(1+r)\widetilde{S}_{t-1}(e - e^{-1})(D_t - (p-q)).\end{aligned}$$

よって,

$$\text{(2.8) の右辺} = \xi_t \Delta\widetilde{S}_t = \xi_t \frac{1}{2}(1+r)\widetilde{S}_{t-1}(e-e^{-1})(D_t - (p-q)) \tag{2.9}$$

((2.8) の左辺について)

$$g(t, L_t) = \widetilde{v}^F(t, S_t) = \widetilde{v}^F(t, S_0 e^{L_t})$$

とおいて離散時間伊藤の公式を適用すると, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned}g(t, L_t) - g(t-1, L_{t-1}) =& \frac{g(t, L_{t-1}+1) - g(t, L_{t-1}-1)}{2}(D_t - (p-q)) \\ &+ pg(t, L_{t-1}+1) + qg(t, L_{t-1}-1) - g(t-1, L_{t-1}).\end{aligned}$$

Doob-Meyer 分解より,

$$\begin{cases} g(t, L_t) - g(t-1, L_{t-1}) = \dfrac{g(t, L_{t-1}+1) - g(t, L_{t-1}-1)}{2}, & (1) \\ pg(t, L_{t-1}+1) + qg(t, L_{t-1}-1) - g(t-1, L_{t-1}) = 0. & (2) \end{cases}$$

(1) より,

$$\widetilde{v}^F(t, S_t) - \widetilde{v}^F(t-1, S_{t-1}) = \frac{1}{2}\left(\widetilde{v}^F(t, eS_{t-1}) - \widetilde{v}^F(t, e^{-1}S_{t-1})\right)(D_t - (p-q)).$$

さらに, (2.9) より,

$$\xi_t = \frac{\widetilde{v}^F(t, eS_{t-1}) - \widetilde{v}^F(t, e^{-1}S_{t-1})}{(1+r)\widetilde{S}_{t-1}(e-e^{-1})}.$$

参考文献

[1] 関根 順, 数理ファイナンス, 確率論教程シリーズ 7, 培風館, 2007.

[2] 藤田 岳彦, ファイナンスの確率解析入門, 講談社, 2002.

[3] 森村 英典, 木島 正明, ファイナンスのための確率過程, 日科技連出版社, 1991.