微分積分学 3 略解

問 1. 実数において有理数全体も無理数全体も稠密である[*1] ので, 任意の分割

$$\Delta : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$$

に対して, どの区間 $[x_{k-1}, x_k]$ にも有理数と無理数が存在する. ゆえに, 任意の k $(1 \leq k \leq n)$ に対し,

$$M_k = 1, \qquad m_k = 0.$$

よって,

$$\overline{S}(\Delta) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = 1, \qquad \underline{S}(\Delta) = 0$$

となり, $\overline{S}(\Delta) \neq \underline{S}(\Delta)$ なので積分不可能である.

問 2. どのような分割をとってもすべての区間が $1/2^n$ 以外の点を含むので, $f(x)$ の下リーマン和は 0 である. よって $\lim_{|\Delta|\to 0}\overline{S}(\Delta) = 0$ であることを示す. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N < 2^{N-1}\varepsilon$ をみたす自然数 N を選び, $[0,1]$ の分割 Δ として 2^N 等分をとる. つまり, Δ の分点は

$$x_k = \frac{k}{2^N} \quad (k = 0, 1, \ldots, 2^N)$$

となる. $[x_{k-1}, x_k]$ のうち $1/2^n$ を含むものを考える. $n > N$ のときは $1/2^n$ はすべて最初の区間 $[x_0, x_1]$ の内部に含まれる. $n \leq N$ のときはすべて分割 Δ の分点になっているので,「$x_k = 1/2^n$ または $x_{k-1} = 1/2^n$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$」となっている小区間に含まれる. このような小区間は $2N$ 個以下で, $[x_0, x_1]$ はそのうちの一つである. よって,

$$\overline{S}(\Delta) = \sum_{k=1}^{2^N} \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)(x_k - x_{k-1}) \leq 2N\frac{1}{2^N} = \frac{N}{2^{N-1}} < \varepsilon.$$

したがって $\lim_{|\Delta|\to 0}\overline{S}(\Delta) = 0$ となるので可積分であり,

$$\int_0^1 f(x)dx = 0.$$

問 3. 対偶を示す. つまり, 点 $x = x_0$ で $f(x_0) > 0$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \neq 0$ となることを示す. $f(x_0) > 0$ なので, $f(x_0) > \varepsilon > 0$ となる $\varepsilon > 0$ が存在する. この ε に対して $\delta > 0$ を十分小さくとれば, $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ に対して $f(x) > \varepsilon > 0$ となる. また, 積分の線形性から

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)dx.$$

また, $f(x) \geq 0$ より

$$\int_a^{x_0-\delta} f(x)dx \geq 0, \qquad \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)dx \geq 0$$

であり, さらに, 右辺の第二項では $f(x) > \varepsilon$ であるから

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0-\delta} f(x)dx > \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0-\delta} dt = 2\varepsilon\delta > 0.$$

[*1] 有理数の稠密性 $\iff$ ${}^\forall a, b \in \mathbb{R},\ {}^\exists q \in \mathbb{Q}$ s.t. $a < q < b$. 無理数の稠密性も同様.

したがって,

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

問 4. $f(x)$ は $[a,b]$ で連続なので, $f(x)$ の $[a,b]$ における最大値, 最小値をそれぞれ M, m とすれば, $m = f(\alpha), M = f(\beta)$ となる $\alpha, \beta \in [a,b]$ が存在する. $g(x) \geq 0$ より

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

$$\therefore \quad m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx.$$

$m = M$ のとき, $f(x) = K$ (定数関数) なので

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = k\int g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx \qquad ({}^\forall c \in [a,b]).$$

$f(x)$ が定数関数でない場合,

(i) $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = m\int_a^b g(x)dx$ の場合, $c = \alpha \in [a,b]$ とおけばよい.

(ii) $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = M\int_a^b g(x)dx$ の場合, $c = \beta \in [a,b]$ とおけばよい.

(iii) $\displaystyle m\int_a^b g(x) < \int_a^b f(x)g(x)dx < M\int_a^b g(x)dx$ の場合,

$$f(\alpha) = m < \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} < M = f(\beta)$$

となるので, 中間値の定理より,

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = f(c)$$

となる $c \in (\alpha, \beta) \subset [a,b]$ が存在する.

以上より,

$${}^\exists c \in [a,b]; \quad \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

問 5. $S(x) = \int_a^x f(t)dt$ とおく. このとき,

$$S(x+h) - S(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt.$$

ここで, 積分の平均値の定理 (前問) を適用すると,

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(\xi)h \qquad (x < \xi < x+h)$$

を満たす ξ が存在し,

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(\xi)$$

が成り立つ. ここで $h \to 0$ とすると, $\xi \to x$ となり, $f(x)$ が連続関数であることから $f(\xi) \to f(x)$ となる. 以上より

$$S'(x) = f(x)$$

であることがわかる.

問 6. (1)

$$\frac{d}{dx}\int_x^a f(t)dt = -\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = -f(x).$$

(2) $x-a<b<x+a$ となる b に対し,

$$\int_{x-a}^{x+a} f(t)dt = \int_b^{x+a} f(t)dt - \int_b^{x-a} f(t)dt.$$

ここで, 右辺第一項目と第二項目の積分において $t=t-a$, $t=t+a$ とそれぞれおくと,

$$\frac{d}{dx}\int_{x-a}^{x+a} f(t)dt = \frac{d}{dx}\int_{b-a}^{x} f(t)dt - \frac{d}{dx}\int_{b+a}^{x} f(t)dt = f(x)-f(x)=0.$$

(3)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_a^b e^t f(x-t)dt &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_a^b e^t f(x+h-t)dx - \int_a^b e^t f(x-t)dx\right)\\ &= \int_a^b e^t\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h-t)-f(x-t)}{h}\right)dx\\ &= \int_a^b e^t f'(x-t)dt.\end{aligned}$$

問 7. 帰納法で示す. $n=1$ のとき, $f(x)$ が微分可能なので,

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt \tag{i}$$

と表せる. ある $i\in\mathbb{N}$ に対して,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{i-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{(i-1)!}\int_a^x f^{(i)}(t)(x-t)^{i-1}dt \tag{i}$$

が成り立つと仮定する. このとき,

$$\begin{aligned}\int_a^x f^{(i)}(t)(x-t)^{i-1}dt &= \int_a^x f^{(i)}(t)\left\{-\frac{1}{i}(x-t)^i\right\}' dt\\ &= \left[f^{(i)}(t)\left\{-\frac{1}{i}(x-t)^i\right\}\right]_a^x - \int_a^x f^{(i+1)}(t)\left\{-\frac{1}{i}(x-t)^i\right\}dt\\ &= \frac{1}{i}f^{(i)}(a)(x-a) + \frac{1}{i}\int_a^x f^{(i+1)}(t)(x-t)^i dt. \qquad \text{(ii)}\end{aligned}$$

(i) を (ii) に代入すると,

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{k=0}^{i-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{(i-1)!}\left\{\frac{1}{i}f^{(i)}(a)(x-a) + \frac{1}{i}\int_a^x f^{(i+1)}(t)(x-t)^i dt\right\}\\ &= \sum_{k=0}^{i}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{i!}\int_a^x f^{(i+1)}(t)(x-t)^i dt.\end{aligned}$$

よって $n=i+1$ のときも成り立つ. 以上より, 全ての $n\in\mathbb{N}$ に対して等式が成り立つ.

問 8. $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$ は明らか. 部分積分法より, $n \geq 2$ に対し

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x (-\cos x)' dx \\
&= \Big[-\sin^{n-1} x \cos x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \\
&= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n.
\end{aligned}$$

すなわち漸化式

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

を得る. よって

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n} \cdot \dfrac{\pi}{2} & (n \geq 2 \text{ は偶数}), \\ \dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n-1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots n} & (n \geq 3 \text{ は奇数}). \end{cases}$$

問 9.

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} \{ \cos(m+n)x + \cos(m-n)x \}$$

より, $m \neq n$ ならば

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

また, $m = n$ ならば

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin 2mx}{2m} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi.$$

問 10. (1)

$$\frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}} \xrightarrow{n \to \infty} \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}.$$

(2)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow{n \to \infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \log 2.$$

(3)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}} \xrightarrow{n \to \infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \log(1+\sqrt{2}).$$

(4)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \xrightarrow{n \to \infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\tan^{-1}(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

(5) $\dfrac{n}{n^2+k^2} = \dfrac{4n}{4n^2+4k^2} = \dfrac{2\cdot 2n}{4n^2(1+\left(\frac{2k}{2n}\right)^2)}$ より,

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{2}{2n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{1+\left(\frac{2k}{2n}\right)^2}$$

$2n=m$ とおくと,

$$= \frac{2}{m}\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{1+\left(\frac{2k}{m}\right)^2} \xrightarrow{m\to\infty} \int_0^2 \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1} 2.$$

問 11. $G(x)$ $(G \neq F)$ を $f(x)$ の原始関数とすると, 原始関数の定義より,

$$\frac{d}{dx}(G(x)-F(x)) = \frac{dG(x)}{dx} - \frac{dF(x)}{dx} = f(x) - f(x) = 0.$$

ゆえに, 関数 $G(x)-F(x)$ は定数関数となり

$$G(x) = F(x) + C \qquad (C \text{ は定数})$$

と書ける.

問 12. (1) $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とする (すなわち $F(x) = \int f(x)dx$). このとき, $x = \emptyset(t)$ とおくと, 合成関数の微分法と原始関数の定義より

$$F'(x) = F'(\emptyset(t))\emptyset'(t) = f(\emptyset(t))\emptyset'(t).$$

すなわち, $F(x)$ は $f(\emptyset(t))\emptyset'(t)$ の原始関数である. よって結論をえる.

(2) 左辺を微分すると $f'(x)g(x)$. 右辺を微分すると

$$f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f(x)g'(x) = f'(x)g(x)$$

となり, 両辺が等しいことが分かる.

問 13. (1)

$$\begin{aligned}\left(\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)' &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right) \\ &= \frac{x-\sqrt{x^2+a}}{x^2-(x^2+a)}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}.\end{aligned}$$

(2) $t = \sqrt{x^2+a} + x$ とおくと,

$$x = \frac{t^2-a}{2t}, \quad dx = \frac{t^2+a}{2t^2}dt, \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{2t}{t^2+a}$$

となるので

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{2t}{t^2+a}\cdot\frac{t^2+a}{2t^2}dt = \int \frac{1}{t}dt = \log|t| = \log|x+\sqrt{x^2+a}|.$$

問 14. 積分定数は省略する.

(1) $t = x^2+2$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = 2x$ より

$$\int \frac{x}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^{3/2}}dt = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{t}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}.$$

(2) $t=e^x$ とおくと, $\frac{dt}{dx}=e^x$ より

$$\int \frac{1}{e^x+1}dx=\int \frac{1}{t(t+1)}dt=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\log t-\log(t+1)$$
$$=x-\log(e^x+1).$$

(3)

$$\int \frac{dx}{x(x+1)^2}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$$
$$=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{(x+1)^2}$$

$t=x+1$ とおくと, $\frac{dt}{dx}=1$ より,

$$=\log x-\log t-\left(-\frac{1}{t}\right)$$
$$=\log x-\log(x+1)+\frac{1}{x+1}.$$

(4)

$$\int\frac{x^2+2}{(x-1)^3}dx=\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{3}{(x-1)^3}\right)dx$$

$t=x-1$ とおくと, $\frac{dt}{dx}=1$ より

$$=\int\frac{dt}{t}+2\int\frac{dt}{t^2}+3\int\frac{dt}{t^3}$$
$$=\log t-\frac{2}{t}-\frac{3}{2t^2}$$
$$=\log(x-1)-\frac{2}{x-1}-\frac{3}{2(x-1)^2}$$

(5)

$$\int\frac{x+2}{x^2+2x+5}dx=\int\left(\frac{2x+2}{2(x^2+2x+5)}-\frac{1}{x^2+2x+5}\right)dx,$$

ここで, $t=x^2+2x+5$ とおくと, $\frac{dt}{dx}=2x+2$ より,

$$\int\frac{2x+2}{2(x^2+2x+5)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t}dt=\frac{1}{2}\log(x^2+2x+5).$$

また, $t=x+1$ とおくと, $\frac{dt}{dx}=1$ より,

$$\int\frac{dx}{x^2+2x+5}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+4}$$
$$=\int\frac{dt}{t^2+4}$$
$$=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(\frac{t}{2})^2+1}$$

$s=\frac{t}{2}$ とおくと, $\frac{ds}{dt}=\frac{1}{2}$ より,

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{s^2+1}ds=\frac{\tan^{-1}(s)}{2}=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

以上より,

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\left(\log(x^2+2x+5)+\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right).$$

問 15. 帰納法で示す. $n=1$ のとき, 部分積分法より

$$\int fg'dx = fg - \int f'gdx$$

が成り立つ. 適当な $i\in\mathbb{N}$ に対して

$$\int fg^{(i)}dx = \sum_{k=0}^{i-1}(-1)^k f^{(k)}g^{(i-1-k)} + (-1)^i\int f^{(i)}gdx$$

が成り立つと仮定する. このとき,

$$\begin{aligned}\int fg^{(i+1)}dx =& \int f(g')^{(i)}dx\\ =&\sum_{k=0}^{i-1}(-1)^k f^{(k)}(g')^{(i-1-k)} + (-1)^i\int f^{(i)}g'dx\\ =&\sum_{k=0}^{i-1}(-1)^k f^{(k)}g^{(i-k)} + (-1)^i\left\{f^{(i)}g + (-1)\int f^{(i+1)}gdx\right\}\\ =&\sum_{k=0}^{i}(-1)^k f^{(k)}g^{(i-1-k)} + (-1)^{i+1}\int f^{(i+1)}gdx.\end{aligned}$$

よって $n=i+1$ でも成り立つ. 以上より, 全ての $n\in\mathbb{N}$ に対して等式が成り立つことがわかる.

問 16. $\tan\frac{x}{2}=t$ とおくと,

$$\begin{aligned}\frac{dt}{dx} =& \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1+t^2}{2},\\ \tan x =& \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2},\\ \cos x =& 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2},\\ \sin x =& \cos x\tan x = \frac{2t}{1+t^2}\end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{1+\sin x} =& \int\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt\\ =& 2\int(t+1)^{-2}dt = 2\int(-(t+1)^{-1})'dx = -\frac{2}{t+1} = -\frac{2}{\tan\frac{x}{2}+1}.\end{aligned}$$

問 17. (1)

$$\int_\varepsilon^1 \log x dx = [x\log x - x]_\varepsilon^1 = -1-(\varepsilon\log\varepsilon-\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{} -1.$$

(2)

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\sin^{-1} x\right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \sin^{-1}\varepsilon - \sin^{-1}(-\varepsilon)$$
$$= 2\sin^{-1}\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 1]{} 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.$$

(3)

$$\begin{aligned}\int_0^t x^2 e^{-x}dx &= \int_0^t x^2(-e^{-x})'dx \\ &= \left[-x^2e^{-x}\right]_0^t - \int_0^t 2x(-e^{-x})dx \\ &= -t^2e^{-t} - \int_0^t 2x(e^{-x})'dx \\ &= -t^2e^{-t} - \left\{\left[2xe^{-x}\right]_0^t - \int_0^t 2e^{-x}dx\right\} \\ &= -t^2e^{-t} - \left\{2te^{-t} - 2\left(-e^{-t}+1\right)\right\} \xrightarrow[t\to\infty]{} 2.\end{aligned}$$

(4)

$$\int_{-t}^{t} \frac{dx}{1+x^2} = \left[\tan^{-1} x\right]_{-t}^{t} = 2\tan^{-1} t \xrightarrow[t\to\infty]{} 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.$$

(5)

$$\int_0^t \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int_0^t \frac{e^x}{(e^x)^2+1}dx$$

$s = e^x$ とおくと, $\frac{ds}{dx} = e^x$ より

$$= \int_1^{e^t} \frac{ds}{1+s^2} = \left[\tan^{-1} s\right]_1^{e^t} = \tan^{-1} e^t - \tan^{-1} 1 \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

問 18. $\displaystyle\int \frac{1}{x(\log x)^\alpha}dx = \frac{\log x^{(1-\alpha)}}{1-\alpha} + C$ (C は積分定数) より,

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\log x)^\alpha}dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{\log x^{(1-\alpha)}}{1-\alpha}\right]_2^t = \frac{1}{1-\alpha}\left\{\lim_{t\to\infty}\log t^{(1-\alpha)} - \log 2^{(1-\alpha)}\right\}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{(\log 2)^{(1-\alpha)}}{\alpha - 1}, & (\alpha > 1) \\ \infty. & (\alpha \leq 1) \end{cases}$$

問 19. (1)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}(-\log\varepsilon) = \infty.$$

(2)

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_\varepsilon^1\\ &= \frac{1}{1-\alpha}\lim_{\varepsilon\to 0}(1-\varepsilon^{1-\alpha}) = \begin{cases}\dfrac{1}{1-\alpha} & (0<\alpha<1)\\ \infty & (1<\alpha)\end{cases}\end{aligned}$$

問 20. $\alpha = 1$ のとき,

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{dx}{x} = \lim_{t\to\infty}\log t = \infty.$$

$\alpha > 0,\ \alpha \neq 1$ のとき,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^t\\ &= \frac{1}{1-\alpha}\lim_{t\to\infty}(t^{1-\alpha}-1) = \begin{cases}\infty & (0<\alpha<1)\\ \dfrac{1}{\alpha-1}. & (1<\alpha)\end{cases}\end{aligned}$$

したがって, $0<\alpha\leq 1$ のとき発散, $1<\alpha$ のとき収束する.

問 21. (1) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x} = 1$ なので, 積分範囲の下端は問題ではない. コーシーの収束条件定理[*2] を用いて示す. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $K = \frac{2}{\varepsilon} > 0$ とおくと, $t_2 > t_1 > K$ となる任意の t_1, t_2 に対し

$$\begin{aligned}\left|\int_{t_1}^{t_2}\frac{\sin x}{x}dx\right| &= \left|\left[\frac{-\cos x}{x}\right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\frac{\cos x}{x^2}dx\right|\\ &\leq \frac{|\cos t_2|}{t_2} + \frac{|\cos t_1|}{t_1} + \int_{t_1}^{t_2}\frac{|\cos x|}{x^2}dx \qquad (\because\ \text{三角不等式})\\ &\leq \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{x^2}dx \qquad (\because\ |\cos x|\leq 1)\\ &= \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} = \frac{2}{t_1} < \frac{2}{K} = \varepsilon.\end{aligned}$$

(2) 積分区間を π の倍数で区切ると,

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx = \int_0^\pi \frac{|\sin t|}{n\pi + t}dt > \frac{1}{n\pi+\pi}\int_0^\pi \sin t dt = \frac{2}{(n+1)\pi}.$$

よって,

$$\int_0^{n\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx > \frac{2}{\pi}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right) \to \infty. \qquad (n\to\infty)$$

問 22. (1) $1 < x$ において

$$x^2 - 1 > x - 1 > 0$$

[*2] 関数 $F(t)$ に対して,

$$^\exists\lim_{t\to\infty}F(t) \iff {}^\forall\varepsilon > 0,\ {}^\exists K > 0;\ {}^\forall t_1, t_2 > K,\ |F(t_2) - F(t_1)| < \varepsilon.$$

今の場合, $F(t) = \int_a^t f(x)dx$.

が成り立つから

$$0 < \frac{1}{x^2-1} < \frac{1}{x-1}.$$

さらに $a > 0$ より

$$0 < \frac{1}{(x^2-1)^a} < \frac{1}{(x-1)^a}.$$

$a < 1$ で右辺の関数はの $(1, 2]$ における広義積分は収束する．よって $a < 1$ では I_a は収束する．

(2) $a = 1$ のとき, $0 < \varepsilon < 1$ を満たす任意の ε に対して．

$$\int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{1}{x^2-1}dx = \int_{1+\varepsilon}^{2} \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}\right)dx = \left[\frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{2}\log|x+1|\right]_{1+\varepsilon}^{2}$$
$$= \frac{1}{2}\log 1 - \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{2}\log\varepsilon + \frac{1}{2}\log(2+\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \infty.$$

よって, I_1 は発散する．

$a > 1$ のとき, $1 < x \leq \sqrt{2}$ では $0 < x^2 - 1 \leq 1$ なので, $(x^2-1)^a < x^2 - 1$ より

$$\frac{1}{(x^2-1)^a} \geq \frac{1}{x^2-1}.$$

よって,

$$\int_{1+\varepsilon}^{\sqrt{2}} \frac{1}{(x^2-1)^a}dx \geq \int_{1+\varepsilon}^{\sqrt{2}} \frac{1}{x^2-1}dx \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \infty.$$

したがって, $a > 1$ のときも I_a は発散する．

問 23. (1) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $K = \{(\alpha-1)\varepsilon\}^{-\frac{1}{\alpha-1}} > 0$ とおくと, $t_1 > t_2 > K$ となる任意の t_1, t_2 に対し,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| dx \leq \int_{t_1}^{t_2} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{t_1^{\alpha-1}} - \frac{1}{t_2^{\alpha-1}}\right)$$
$$< \frac{1}{(\alpha-1)t_1^{\alpha-1}} < \frac{1}{(\alpha-1)K^{\alpha-1}} = \varepsilon.$$

(2) まず収束することを示す．任意の $\varepsilon > 0$ に対して $K = \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha} > 0$ とおくと, 任意の t_1, t_2 $(t_1 > t_2 > K)$ に対し,

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx\right| = \left|\left[\frac{-\cos x}{x^\alpha}\right]_{t_1}^{t_2} - \alpha\int_{t_1}^{t_2} \frac{x^{\alpha-1}\cos x}{x^{2\alpha}}dx\right|$$
$$\leq \frac{1}{t_1^\alpha} + \frac{1}{t_2^\alpha} + \alpha\int_{t_1}^{t_2} \frac{dx}{x^{\alpha+1}}$$
$$= \frac{1}{t_1^\alpha} + \frac{1}{t_2^\alpha} + \alpha\cdot\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{t_1^\alpha} - \frac{1}{t_2^\alpha}\right) = \frac{2}{t_2^\alpha} < \frac{2}{K^\alpha} = \varepsilon.$$

一方,

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| dx = \int_0^\pi \frac{|\sin t|}{n\pi + t}dt > \frac{1}{(n\pi+\pi)^\alpha}\int_0^\pi \sin t dt = \frac{2}{\{(n+1)\pi\}^\alpha}$$

より，

$$\begin{aligned}\int_\pi^\infty \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| dx =& \sum_{k=1}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| dx \\ =& \frac{2}{\pi^\alpha}\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots\right) = \infty. \qquad (\because 0<\alpha\le 1)\end{aligned}$$

問 24. (1)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$$

ここで, 右辺第二項目の積分において $x=\pi-x$ とすると

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}.$$

ここで,

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}} = \lim_{x\downarrow 0} \sqrt{\frac{x}{\sin x}} = 1$$

より

$$^\forall\varepsilon>0,\ ^\exists\delta>0;\ 0<{}^\forall x<\delta,\ \left|\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}}-1\right|<\varepsilon$$

が成り立つ. ゆえに, ある $C>0$ が存在して, 任意の $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$ に対して

$$\left|\frac{1}{\sqrt{\sin x}}\right| < C\frac{1}{\sqrt{x}}$$

となる. また,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

となるので, 定理より $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ は絶対収束することがわかる.

(2)

$$\begin{aligned}\lim_{x\downarrow 0}\sqrt{x}\log(\sin x) =& \lim_{x\downarrow 0}\frac{\log(\sin x)}{x^{-\frac{1}{2}}} \\ =& \lim_{x\downarrow 0}\frac{-2x^{\frac{3}{2}}\cos x}{\sin x} \qquad (\because \text{ ロピタルの定理}) \\ =& \lim_{x\downarrow 0}\frac{-2x^{\frac{3}{2}}}{\sin x}\lim_{x\downarrow 0}\cos x \\ =& \lim_{x\downarrow 0}\frac{-3\sqrt{x}}{\cos x} \qquad (\because \text{ ロピタルの定理}) \\ =& 0.\end{aligned}$$

より

$$^\forall\varepsilon>0,\ ^\exists\delta>0;\ 0<{}^\forall x<\delta,\ \left|\sqrt{x}\log(\sin x)\right|<\varepsilon$$

が成り立つ. ゆえに, ある $C>0$ が存在して, 任意の $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$ に対して

$$|\log(\sin x)| < C\frac{1}{\sqrt{x}}$$

となる. よって (1) と同様の議論により絶対収束がわかる.

(3)

$$\int_0^\infty \left|e^{-x^2}\right| dx = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^\infty e^{-x^2} dx.$$

右辺第一項目の積分は被積分関数の有界性から有限である. 第二項目の積分は, $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ $(x \geq 1)$ であること, および

$$\int_1^\infty e^{-x} dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t e^{-x} dx = \lim_{t\to\infty} [-e^{-x}]_1^t = e^{-1}$$

であることにより収束する. したがって $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ は絶対収束する.

問 25.

$$\int_0^\infty x^4 e^{-x^4} dx = \int_0^1 x^4 e^{-x^4} dx + \int_1^\infty x^4 e^{-x^4} dx.$$

右辺第一項目の積分は被積分関数の有界性から有限である. また, 部分積分法より

$$\begin{aligned}\int_1^t x^4 e^{-x^4} dx &= -\frac{1}{4}\int_1^t x(e^{-x^4})' dx \\ &= -\frac{1}{4}\left\{\left[xe^{-x^4}\right]_1^t - \int_1^t e^{-x^4} dx\right\}.\end{aligned}$$

ここで, ロピタルの定理より

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x}{e^{x^4}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{4x^3 e^{x^4}} = 0.$$

また, $x \geq 1$ のとき, $e^{-x^4} \leq e^{-x}$ なので

$$\int_1^t e^{-x^4} dx \leq \int_1^t e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_1^t \xrightarrow{t\to\infty} e^{-1}.$$

以上より $\displaystyle\int_0^\infty x^4 e^{-x^4} dx$ は収束することがわかる.

$f(x)$	$\int f(x)dx$
$x^a \quad (a \neq -1)$	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C$
$\dfrac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\tan x$	$-\log\lvert\cos x\rvert + C$
$\dfrac{1}{\tan x}$	$\log\lvert\sin x\rvert + C$
$\dfrac{1}{\cos x}$	$\log\left\lvert\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
$\dfrac{1}{\sin x}$	$\log\left\lvert\tan\dfrac{x}{2}\right\rvert + C$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\dfrac{1}{\tan x} + C$
e^x	$e^x + C$
$a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$	$\dfrac{a^x}{\log a} + C$
$\log x$	$x\log x - x + C$
$\dfrac{1}{x^2 + a^2} \quad (a \neq 0)$	$\dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a} + C$
$\dfrac{1}{x^2 - a^2} \quad (a \neq 0)$	$\dfrac{1}{2a}\log\left\lvert\dfrac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (a > 0)$	$\sin^{-1}\dfrac{x}{a} + C$
$\sqrt{a^2 - x^2} \quad (a > 0)$	$\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\sin^{-1}\dfrac{x}{a}\right) + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a}} \quad (a \neq 0)$	$\log\left\lvert x + \sqrt{x^2 + a}\right\rvert + C$
$\sqrt{x^2 + a} \quad (a \neq 0)$	$\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 + a} + a\log\left\lvert x + \sqrt{x^2 + a}\right\rvert\right) + C$

問 **26.** 積分定数は省略.

(1) $t = 5x$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = 5$ より

$$\int \cos(5x)dx = \frac{1}{5}\int \cos t dt = \frac{1}{5}\sin t = \frac{1}{5}\sin(5x).$$

(2) $t = 3x^3$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = 9x^2$ より

$$\int x^2 e^{3x^3} dx = \frac{1}{9}\int e^t dt = \frac{e^t}{9} = \frac{e^{3x^3}}{9}.$$

(3) $t = x^3$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = 3x^2$ より

$$\int x^2 \sin(x^3)dx = \frac{1}{3}\int \sin t dt = -\frac{\cos t}{3} = -\frac{1}{3}\cos x^3.$$

(4) $t = \cos x$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = -\sin x$ より

$$\int \sin x \sin(\cos x)dx = -\int \sin t dt = \cos t = \cos(\cos x).$$

(5) $t = \cos x + 3$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = -\sin x$ より

$$\int \frac{\sin x}{\cos x + 3}dx = -\int \frac{1}{t}dt = -logt = -\log(\cos x + 3).$$

(6) $t = \cos x$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = -\sin x$ より

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{1}{t}dt = -\log t = -\log(\cos x).$$

(7) $t = x^{n+1} + 1$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = (n+1)x^n$ より

$$\int \frac{x^n}{x^{n+1}+1}dx = \frac{1}{n+1}\int \frac{1}{t}dt = \frac{\log t}{n+1} = \frac{\log(x^{n+1}+1)}{n+1}.$$

(8) $t = \log x$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ より

$$\int \frac{1}{x(\log x)^2}dx = \int \frac{1}{t^2}dt = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\log x}.$$

(9) $x = \sin t$ とおくと, $\frac{dx}{dt} = \cos t$ より

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{\cos t}{|\cos t|}dt$$

$-1 \le x \le 1$ より, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ なので

$$= \int dt = t = \sin^{-1} x.$$

問 **27.** 積分定数は省略.

(1)

$$\int x \sin x dx = \int x(-\cos x)' dx = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x.$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\int x^2 \cos x dx =& \int x^2 (\sin x)' dx \\
=& x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx \\
=& x^2 \sin x - 2 \int x(-\cos x)' dx \\
=& x^2 \sin x - 2 \left\{ -x \cos x + \int \cos x dx \right\} \\
=& x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x.
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\int \frac{\log x}{x^2} dx = \int \log x \left(-\frac{1}{x} \right)' dx = -\frac{\log x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\log x + 1}{x}.
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\log x}{\sqrt{x}} =& \int \log x (2\sqrt{x})' dx \\
=& 2\sqrt{x} \log x - 2 \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \log x - 4\sqrt{x}.
\end{aligned}
$$

(5)

$$
\begin{aligned}
\int e^x \sin x dx =& \int (e^x)' \sin x dx \\
=& e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \\
=& e^x \sin x - \int (e^x)' \cos x dx \\
=& e^x \sin x - \left\{ e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \right\}.
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad \int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x).
$$

(6)

$$\begin{aligned}
\int e^{ax}\cos(bx)dx =& \int \left(\frac{e^{ax}}{a}\right)'\cos(bx)dx \\
=& \frac{e^{ax}\cos(bx)}{a} + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin(bx)dx \\
=& \frac{e^{ax}\cos(bx)}{a} + \frac{b}{a}\int \left(\frac{e^{ax}}{a}\right)'\sin(bx)dx \\
=& \frac{e^{ax}\cos(bx)}{a} + \frac{b}{a}\left\{\frac{e^{ax}\sin(bx)}{a} - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)dx\right\} \\
=& \frac{e^{ax}\cos(bx)}{a} + \frac{be^{ax}\sin(bx)}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos(bx)dx \\
\therefore \quad \left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\int e^{ax}\cos(bx)dx =& \frac{e^{ax}\cos(bx)}{a} + \frac{be^{ax}\sin(bx)}{a^2} \\
\therefore \quad \int e^{ax}\cos(bx)dx =& \frac{ae^{ax}\cos(bx) + be^{ax}\sin(bx)}{a^2+b^2}
\end{aligned}$$

[別解]

$$I = \int e^{ax}\cos bx dx, \qquad J = \int e^{ax}\sin bx dx$$

とおくと, 部分積分法より

$$\begin{cases} I = \dfrac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \dfrac{a}{b}J, \\ J = -\dfrac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \dfrac{a}{b}I. \end{cases}$$

この連立方程式を I, J について解くと

$$I = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2}, \qquad J = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}.$$

問 28. (1)

$$\int_0^a x\sqrt{ax-x^2}dx = -\frac{1}{2}\left\{\int_0^a (a-2x)\sqrt{ax-x^2}dx - a\int_0^a \sqrt{ax-x^2}dx\right\}.$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\int_0^a (a-2x)\sqrt{ax-x^2}dx =& \frac{2}{3}\int_0^a \left((ax-x^2)^{\frac{3}{2}}\right)'dx = \frac{2}{3}\left[(ax-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a = 0 \\
\int_0^a \sqrt{ax-x^2}dx =& \int_0^a \sqrt{\frac{a^2}{4} - \left(x-\frac{a}{2}\right)^2}
\end{aligned}$$

$t = x - \frac{a}{2}$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = 1$ より

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - t^2}\ dt \\
&= \left[\frac{1}{2}\left(t\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - t^2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2\sin^{-1}\left(\frac{2t}{a}\right)\right)\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \\
&= \frac{a^2}{8}(\sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(-1)) = \frac{a^2}{8}(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})) = \frac{a^2\pi}{8}.
\end{aligned}$$

以上より

$$\int_0^a x\sqrt{ax-x^2}dx = \frac{a^3\pi}{16}.$$

(2)

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx = \int_0^1 \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx$$

$t = x - \frac{1}{2}$ とおくと，$\frac{dt}{dx} = 1$ より

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

(3) $x = \tan t$ とおくと，$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t}$ より，

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}}\frac{1}{\cos^2 t}dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\cos^2 t}-1}}\frac{1}{\cos^2 t}dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t}dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cos^2 t}+\frac{\tan t}{\cos t}}{\frac{1}{\cos t}+\tan t}dt$$

$u = \frac{1}{\cos t} + \tan t$ とおくと，$\frac{du}{dt} = \frac{\tan t}{\cos t} + \frac{1}{\cos^2 t}$ より

$$= \int_{\sqrt{2}-1}^{1+\sqrt{2}} \frac{1}{u}du = [\log u]_{\sqrt{2}-1}^{1+\sqrt{2}} = \log(3+2\sqrt{2}).$$

(4) $t = x^2+1$ とおくと，$\frac{dt}{dx} = 2x$ より

$$\int_0^3 x\log(1+x^2)dx = \frac{1}{2}\int_1^{10} \log t dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[t\log t - t\right]_1^{10} = 5\log 10 - \frac{9}{2}.$$

(5) $t = e^x$ とおくと，$\frac{dt}{dx} = e^x$ より

$$\int_0^{\log 2} \sqrt{e^x-1}dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{t-1}}{t}dt$$

$u=\sqrt{t-1}$ とおくと，$\frac{du}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{t-1}}$ より

$$
\begin{aligned}
&=2\int_0^1 \frac{u^2}{u^2+1}du \\
&=2\int_0^1 \left(1-\frac{1}{u^2+1}\right)du \\
&=2\left[u\right]_0^1-2\left[\tan^{-1}(u)\right]_0^1=2-\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

(6) 部分積分法より

$$
\begin{aligned}
I_{m,n}:=\int_0^1 x^m(1-x)^n &=\int_0^1\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right)'(1-x)^n dx \\
&=\left[\frac{x^{m+1}}{m+1}(1-x)^n\right]_0^1+\int_0^1\frac{x^{m+1}}{m+1}n(1-x)^{n-1}dx \\
&=\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}dx \\
&=\frac{n}{m+1}I_{m+1,n-1} \\
&=\frac{n}{m+1}\frac{n-1}{m+2}I_{m+2,n-2} \\
&=\cdots=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 1}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)}I_{m+n-1,1} \\
&=\frac{m!n!}{(m+n-1)!}\int_0^1 x^{m+n-1}(1-x)dx \\
&=\frac{m!n!}{(m+n-1)!}\left(\int_0^1 x^{m+n-1}dx-\int_0^1 x^{m+n}dx\right) \\
&=\frac{m!n!}{(m+n-1)!}\left(\left[\frac{x^{m+n}}{m+n}\right]_0^1-\left[\frac{x^{m+n+1}}{m+n+1}\right]_0^1\right) \\
&=\frac{m!n!}{(m+n-1)!}\left(\frac{1}{m+n}-\frac{1}{m+n+1}\right) \\
&=\frac{m!n!}{(m+n-1)!}\frac{1}{(m+n)(m+n+1)}=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}.
\end{aligned}
$$

問 29. (1) $t=3-x$ とおくと，$\frac{dt}{dx}=-1$ より

$$
\int_1^3\sqrt{3-x}dx=-\int_2^0\sqrt{t}dt=\int_0^2\sqrt{t}dt=\frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_0^2=\frac{4}{3}\sqrt{2}.
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^1|e^x-1|dx&=\int_0^1(e^x-1)dx-\int_{-1}^0(e^x-1)dx \\
&=\left[e^x-x\right]_0^1-\left[e^x-x\right]_{-1}^0=(e-1-1)-(1-(e^{-1}+1))=e+e^{-1}-2.
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\int_0^1\frac{x+1}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{1}{x^2+x+1}\right)dx,
$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx =& \frac{1}{2}\left[\log|x^2+x+1||\right]_0^1 = \frac{1}{2}\log 3,\\
\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}dx =& \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx\\
=& \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1\\
=& \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\tan^{-1}\sqrt{3}-\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{2\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

以上より

$$\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\log 3 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

(4)

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}dx =& \int_a^b \sqrt{bx-x^2-ab+ax}\,dx\\
=& \int_a^b \sqrt{\left(\tfrac{b-a}{2}\right)^2-\left(x-\tfrac{a+b}{2}\right)^2}\,dx\\
=& \frac{1}{2}\Bigg[\left(x-\tfrac{a+b}{2}\right)\sqrt{\left(\tfrac{b-a}{2}\right)^2-\left(x-\tfrac{a+b}{2}\right)^2}\\
&\qquad + \left(\tfrac{b-a}{2}\right)^2\sin^{-1}\left(\tfrac{2x-(a+b)}{b-a}\right)\Bigg]_a^b\\
=& \frac{1}{2}\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\left(\sin^{-1}(1)-\sin^{-1}(-1)\right)\right) = \frac{\pi}{8}(a-b)^2
\end{aligned}$$

(5)

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1+a\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a\cos x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{dx}{1+a\cos x},$$

ここで, 二項目の積分において $x=\pi-x$ と置換すると,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{dx}{1+a\cos x} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{dx}{1+a\cos(\pi-x)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-a\cos x}.$$

ゆえに,

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{dx}{1+a\cos x} =& 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-a^2\cos^2 x}\\
=& 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1-a^2+\tan^2 x}dx\\
=& \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{\sqrt{1-a^2}}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}.
\end{aligned}$$