微分積分学 3(積分)

1　定積分

$f(x)$ を区間 $I=[a,b]$ 上の有界な関数[*1]とする．I の分割

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

に対し, $|\Delta| = \max\{x_k - x_{k-1}; k = 1, 2, \ldots, n\}$ とする．各 $k = 1, \ldots, n$ に対して

$$M_k := \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \qquad m_k := \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x),$$

$$\overline{S}(\Delta) := \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}), \qquad \underline{S}(\Delta) := \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$$

とおく．$\overline{S}(\Delta), \underline{S}(\Delta)$ をそれぞれ**上リーマン和, 下リーマン和**とよぶ.

定義 (定積分).

$$\begin{aligned} f(x) \text{ は } I \text{ 上で}\textbf{積分可能} &\overset{\text{def}}{\iff} \inf_{\Delta} \overline{S}(\Delta) = \sup_{\Delta} \underline{S}(\Delta) \\ &\iff \lim_{|\Delta| \to 0} \overline{S}(\Delta) = \lim_{|\Delta| \to 0} \underline{S}(\Delta) \qquad (\because \text{ ダルブウの定理}) \\ &\iff \lim_{|\Delta| \to 0} (\overline{S}(\Delta) - \underline{S}(\Delta)) = 0 \end{aligned}$$

このとき, $\overline{S}(= \underline{S})$ の値を $f(x)$ の $I=[a,b]$ 上の**定積分**とよび, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ と表す.

問 1. 関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ は有理数}) \\ 0 & (x \text{ は無理数}) \end{cases}$$

は $[0,1]$ で積分可能でないことを示せ.

問 2. 関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \left(x = \dfrac{1}{2^n}\ (n = 1, 2, 3, \ldots)\right) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

は $[0,1]$ で積分可能であることを示し,

$$\int_0^1 f(x)dx$$

の値を求めよ.

問 3. $f(x)$ は $[a,b]$ で連続かつ $f(x) \geq 0$ とする．このとき次が成り立つことを示せ.

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \implies {}^{\forall} x \in [a,b],\ f(x) = 0.$$

[*1] $^{\exists} m, M$ s.t. $m \leq f(x) \leq M$.

問 **4.** $f(x), g(x)$ は $[a,b]$ で連続かつ $g(x) \geq 0$ とする．このとき次が成り立つことを示せ．

$$^{\exists}c \in [a,b]; \quad \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

問 **5.** $f(x)$ は $[a,b]$ で連続であるとする．このとき次が成り立つことを示せ．

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \qquad (^{\forall}x \in (a,b)).$$

問 **6.** 次の関数を (x について) 微分せよ．ただし, $f(x)$ は連続であるとする．

$$(1)\ \int_x^a f(t)dx \qquad (2)\ \int_{x-a}^{x+a} f(t)dt \qquad (3)\ \int_a^b e^t f(x-t)dt$$

問 **7.** $f(x)$ が区間 I で C^n 級のとき, 任意の $x, a \in I$ に対し, 次が成り立つことを示せ．

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_n^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt.$$

問 **8.** n を自然数とするとき, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ を求めよ．

問 **9.** m, n を自然数とするとき, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx$ を求めよ．

問 **10.** $f(x)$ が $[a,b]$ で連続ならば,

$$\begin{aligned}
&\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) \\
&= \frac{b-a}{n}\left\{f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + \frac{2(b-a)}{n}\right) + \cdots + f\left(a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}\right)\right\} \\
&\xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f(x)dx
\end{aligned}$$

が成り立つ．これを用いて, 次の和の $n \to \infty$ での値を求めよ．

$$(1)\ \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \quad (2)\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \quad (3)\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} \quad (4)\ \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$$

$$(5)\ \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

2　不定積分

定義 (原始関数, 不定積分)

関数 $F(x)$ が, 関数 $f(x)$ の**原始関数 (不定積分)** である $\overset{\text{def}}{\iff}$ $F'(x) = f(x)$.
このとき, $F(x) = \displaystyle\int f(x)dx$ と表す.

問 **11.** $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数の一つとするとき, 他の原始関数は $F(x) + C$, (C は定数) の形で表されることを示せ.

問 12. (1) $f(x)$ を連続関数, $\varphi(t)$ を C^1 級関数とすると,

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

が成り立つことを示せ.

(2) $f(x), g(x)$ を C^1 級関数とすると,

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

が成り立つことを示せ.

問 13. 不定積分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| \qquad (\text{積分定数は省略},\ a \neq 0\ \text{は定数})$$

について,

(1) 右辺を微分することにより上が成り立つことを示せ.

(2) 直接積分を計算することにより上が成り立つことを示せ.

問 14. 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1}$ (3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

(4) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{(x-1)^3}dx$ (4) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+2x+5}dx$

問 15. $f(x), g(x)$ は n 回微分可能とする. このとき

$$\int fg^{(n)}dx = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f^{(k)}g^{(n-1-k)} + (-1)^n \int f^{(n)}gdx$$

が成り立つことを示せ.

問 16. 不定積分

$$\int \frac{dx}{1+\sin x}$$

の値を変数変換 $\tan\frac{x}{2} = t$ を用いて求めよ.

3　広義積分

定義 (広義積分)

(I) $f(x)$ が $[a,b)$ で連続であるが有界でない場合.

$$\int_a^b f(x)dx := {}^{\exists}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

(II) $f(x)$ が $(a,b]$ で連続であるが有界でない場合.

$$\int_a^b f(x)dx := {}^{\exists}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx,$$

(III) $f(x)$ が $[a,\infty)$ で連続である場合.

$$\int_a^\infty f(x)dx := {}^{\exists}\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx,$$

(IV) $f(x)$ が $(-\infty,b]$ で連続である場合.

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx := {}^{\exists}\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx$$

が成り立つとき, $f(x)$ はそれぞれ $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,\infty)$, $(-\infty,b]$ で**広義積分可能**といい, 左辺を**広義積分**という. 広義積分可能であることを, **広義積分は収束する**ともいう.

また, $-\infty \le a < b \le \infty$ に対し, $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx < \infty$ のとき, この広義積分は**絶対収束する**という.

問 17. 次の積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \log x dx$　(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$　(3) $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-x}dx$

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$　(5) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

問 18. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^\alpha}$　(α は定数) を求めよ.

問 19. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ $(\alpha>0)$ について,

(1) $\alpha \ge 1$ のとき, この積分は発散することを示せ.

(2) $0<\alpha<1$ のとき, この積分は収束することを示せ.

問 20. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ $(\alpha>0)$ の収束・発散を調べよ.

問 21. (1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ は収束することを示せ.

(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx$ は発散することを示せ.

問 22.

$$I_a = \int_1^2 \frac{1}{(x^2-1)^a} dx \qquad (a > 0)$$

について,

(1) $a < 1$ のとき, I_a は収束することを示せ.

(2) $a \geq 1$ のとき, I_a は発散することを示せ.

問 23. $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ について,

(1) $1 < \alpha < 2$ のとき, この積分は絶対収束することを示せ.

(2) $0 < \alpha \leq 1$ のとき, この積分は収束するが絶対収束しないことを示せ.

問 24.

定理. 区間 (a, b) or $(a, b]$ or $[a, b)$ $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ 上の関数 $f(x)$ に対し,

$$^{\exists}g(x);\ |f(x)| \leq g(x) \text{ and } \int_a^b g(x) < \infty \implies \int_a^b |f(x)| dx < \infty.$$

上の定理を用いて次の広義積分が絶対収束することを示せ.

$$(1)\ \int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} \quad (2)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) dx \quad (3)\ \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

問 25. 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty x^4 e^{-x^4} dx$ が収束することを示せ.

4 積分の計算問題

必要であれば次のページの表を用いよ.

問 26. 置換積分法を用いて次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \cos(5x)dx$　(2) $\displaystyle\int x^2 e^{3x^3}dx$　(3) $\displaystyle\int x^2\sin(x^3)dx$

(4) $\displaystyle\int \sin x\sin(\cos x)dx$　(5) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x+3}dx$　(6) $\displaystyle\int \tan x dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{x^n}{x^{n+1}+1}dx$　(8) $\displaystyle\int \frac{1}{x(\log x)^2}dx$　(9) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

問 27. 部分積分法を用いて次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x\sin x dx$　(2) $\displaystyle\int x^2\cos x dx$　(3) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x^2}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{\log x}{\sqrt{x}}$　(5) $\displaystyle\int e^x\sin x dx$　(6) $\displaystyle\int e^{ax}\cos(bx)dx$

問 28. 次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^a x\sqrt{ax-x^2}dx$　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx$　(3) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

(4) $\displaystyle\int_0^3 x\log(1+x^2)dx$　(5) $\displaystyle\int_0^{\log 2}\sqrt{e^x-1}dx$　(6) $\displaystyle I_{m,n} := \int_0^1 x^m(1-x)^n dx$

問 29. つぎの定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{1-x}dx$　(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 |e^x-1|dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+x+1}dx$　(4) $\displaystyle\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}dx \quad (a<b)$

(5) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{1+a\cos x} \quad (0<a<1)$

$f(x)$	$\int f(x)dx$
$x^a \quad (a \neq -1)$	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C$
$\dfrac{1}{x}$	$\log \lvert x \rvert + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\tan x$	$-\log \lvert \cos x \rvert + C$
$\dfrac{1}{\tan x}$	$\log \lvert \sin x \rvert + C$
$\dfrac{1}{\cos x}$	$\log \left\lvert \tan \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4} \right) \right\rvert + C$
$\dfrac{1}{\sin x}$	$\log \left\lvert \tan \dfrac{x}{2} \right\rvert + C$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\dfrac{1}{\tan x} + C$
e^x	$e^x + C$
$a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$	$\dfrac{a^x}{\log a} + C$
$\log x$	$x \log x - x + C$
$\dfrac{1}{x^2 + a^2} \quad (a \neq 0)$	$\dfrac{1}{a} \tan^{-1} \dfrac{x}{a} + C$
$\dfrac{1}{x^2 - a^2} \quad (a \neq 0)$	$\dfrac{1}{2a} \log \left\lvert \dfrac{x-a}{x+a} \right\rvert + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (a > 0)$	$\sin^{-1} \dfrac{x}{a} + C$
$\sqrt{a^2 - x^2} \quad (a > 0)$	$\dfrac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1} \dfrac{x}{a} \right) + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a}} \quad (a \neq 0)$	$\log \left\lvert x + \sqrt{x^2 + a} \right\rvert + C$
$\sqrt{x^2 + a} \quad (a \neq 0)$	$\dfrac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 + a} + a \log \left\lvert x + \sqrt{x^2 + a} \right\rvert \right) + C$

参考文献

[1] 小池 茂昭, 微分積分, 数学書房, 2010.

[2] 田島 一郎, 解析入門, 岩波全書, 1981.

[3] 難波 誠, 微分積分学, 裳華房, 1996.