# 微分積分学 2 略解

**問 1.**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x)-f(a) = \lim_{h\to 0} f(a+h)-f(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\lim_{h\to 0} h\\ &= f'(a)\cdot 0\\ &= 0.\end{aligned}$$

ゆえに $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. よって $f(x)$ は $x=a$ で連続.

**問 2.** ($\Longrightarrow$) $A = f'(a)$ とおくと, $x \neq a$ に対し,

$$\omega(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$$

とおくと, これは (i) を満たす. また, $f(x)$ は $x=a$ で微分可能なので,

$$\lim_{h\to 0}\omega(h) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) = 0.$$

よって (ii) も満たす.

($\Longleftarrow$)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{Ah+h\omega(h)}{h} = A + \lim_{h\to 0}\omega(h) = A.$$

**問 3.** 問 2 より, $f(x), g(x)$ は

$$f(a+h) = f(a) + Ah + h\omega_f(h) \qquad (\star)$$
$$g(a+h) = g(a) + Bh + h\omega_g(h) \qquad (\star\star)$$

と書ける. ここで, $A = f'(a), B = g'(a)$ であり, $\omega_f(h), \omega_g(h)$ は $\lim_{h\to 0}\omega_f(h) = \lim_{h\to 0}\omega_g(h) = 0$ を満たす.

(1) $(\star)$ と $(\star\star)$ を辺々足す (引く) と

$$f(a+h) \pm g(a+h) = f(a) \pm g(a) + (A \pm B)h + h(\omega_f(h) \pm \omega_g(h)).$$

ここで, $\lim_{h\to 0}\omega_f(h) \pm \omega_g(h) = 0$ なので, 問 2 の結果より, $(f\pm g)'(x)$ は $x=a$ で微分可能で,

$$(f\pm g)'(a) = A \pm B = f'(a) \pm g'(a).$$

(2) $(\star)$ と $(\star\star)$ を辺々かけると

$$f(a+h)g(a+h) = f(a)g(a) + (Ag(a) + f(a)B)h + \omega(h),$$

ただし,

$$\omega(h) = f(a)h\omega_g(h) + ABh^2 + Ah^2\omega_g(h) + g(a)h\omega_f(h) + Bh^2\omega_f(h) + h^2\omega_f(h)\omega_g(h)$$

である. このとき, $\lim_{h\to 0}\omega(h) = 0$ となるので, 問 2 の結果より, $(fg)(x)$ は $x=a$ で微分可能で,

$$(fg)'(x) = Ag(a) + f(a)B = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

(3) $(\star)$ と $(\star\star)$ より,

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)}{g(a+h)}-\frac{f(a)}{g(a)}=&\frac{f(a+h)g(a)-f(a)g(a+h)}{g(a+h)g(a)}\\=&\frac{(f(a)+Ah+h\omega_f(h))g(a)-f(a)(g(a)+Bh+h\omega_g(h))}{(g(a)+Bh+h\omega_g(h))g(a)}\\=&\frac{(Ag(a)-f(a)B)h+h(g(a)\omega_f(h)-f(a)\omega_g(h))}{g^2(a)+g(a)(Bh+h\omega_g(h))}\\=&\frac{Ag(a)-f(a)B}{g^2(a)}h+\omega(h),\end{aligned}$$

ここで,

$$\omega(h)=\frac{g(a)(g(a)\omega_f(h)-f(a)\omega_g(h))-h(B+\omega_g(h))(Ag(a)-f(a)B)}{g^2(a)(g(a)+h(B+\omega_g(h)))}$$

である. このとき, $\lim_{h\to 0}\omega(h)=0$ となるので, 問 2 の結果より, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ は $x=a$ で微分可能で,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{Ag(a)-f(a)B}{g^2(a)}=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

**問 4.** (1) $x=0$ でのみ微分可能でない.

解答. $a,x\in[0,\infty)$ に対して

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}.$$

$a>0$ のとき,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

となり, $f(x)$ は $x=a$ で微分可能である.

$a=0$ のとき,

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

となり, $f(x)$ は $x=0$ で微分可能でない. □

(2) $x=0$ でのみ微分可能でない.

解答. $a,x\in\mathbb{R}$ に対して

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{|x|-|a|}{x-a}.$$

$a\neq 0$ のとき,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{|x|-|a|}{x-a}=\begin{cases}1 & \text{if } a>0,\\ -1 & \text{if } a<0.\end{cases}$$

$a=0$ のとき,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}&=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{x}=1,\\ \lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}&=\lim_{x\to 0-}\frac{-x}{x}=-1\end{aligned}$$

となり, $f(x)$ は $x=0$ で微分可能でない. □

(3) $x \in (-1,1)$ で微分可能, $x = \pm 1$ で微分可能でない.

解答. $a, x \in [-1,1]$ に対して

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-a^2}}{x-a} = \frac{-(x+a)}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-a^2}}.$$

$a \in (-1,1)$ のとき,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{-(x+a)}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-a^2}} = -\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}.$$

ゆえに微分可能.

$a=-1$ のとき,

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1}\frac{-(x-1)}{\sqrt{1-x^2}} = \infty$$

となり微分可能でない. $a=1$ のときも同様である. □

**問 5.** $x \neq 0$ のとき, 計算すると

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \tag{$*$}$$

を得る. $x=0$ のとき,

$$\left|\frac{f(h)-f(0)}{h}\right| = \left|\frac{h^2\sin(1/h)-0}{h}\right| = \left|h\sin\frac{1}{h}\right| \le |h| \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

すなわち, $f(x)$ は $x=0$ でも微分可能で $f'(0)=0$ となる.

$(*)$ において, $\lim_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ は存在しない. ゆえに $\lim_{h\to 0} f'(x)$ も存在しない. よって $f'(x)$ は $x=0$ で不連続である.

**問 6.** 仮定より, $^\forall\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して, $0<h<\delta, 0<k<\delta$ ならば

$$-\varepsilon < \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) < \varepsilon, \tag{$*$}$$

$$-\varepsilon < \frac{f(a)-f(a-k)}{k} - f'(a) < \varepsilon \tag{$**$}$$

が成り立つ. $h,k>0$ とすると, $\dfrac{h}{h+k} > 0$ かつ $\dfrac{k}{h+k} > 0$ なので, $(*)$, $(**)$ より

$$\frac{h}{h+k}(-\varepsilon) < \frac{f(a+h)-f(a)}{h+k} - \frac{h}{h+k}\cdot f'(a) < \frac{h}{h+k}\cdot\varepsilon,$$
$$\frac{k}{h+k}(-\varepsilon) < \frac{f(a)-f(a-k)}{h+k} - \frac{k}{h+k}\cdot f'(a) < \frac{k}{h+k}\cdot\varepsilon.$$

全辺それぞれ足すと

$$-\varepsilon < \frac{f(a+h)-f(a-k)}{h+k} - f'(a) < \varepsilon.$$

よって結論を得る.

**問 7.** $^\forall x, y$ $(a \le x < y \le b)$ に対し, 平均値の定理より,

$$^\exists c \in (x,y);\ \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c) = 0.$$

ゆえに, 任意の $x, y \in [a,b]$ に対し, $f(x)=f(y)$. よって $f(x)$ は定数関数である.

**問 8.** (1) 問 7 と同様に示せる.
(2)
$$f(x) = \log(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$
とおくと, $f(x)$ は (1) の条件を満たすので単調増加である. $f(0) = 0$ であることと合わせると, ${}^{\forall}x > 0$ に対して $f(x) > 0$ が成り立つことがわかる.

**問 9.** 区間 $I$ で $f''$ が存在するので, $f(x), f'(x)$ は $I$ で連続である. 任意の $x_1, x_2 \in I$ と任意の $t \in (0,1)$ に対して, $\xi = (1-t)x_1 + tx_2$ とおくと, $x_1 < \xi < x_2$ で, 平均値の定理より
$$\begin{aligned} {}^{\exists}c_1 \in (x_1, \xi);\ \ \frac{f(\xi) - f(x_1)}{\xi - x_1} &= f'(c_1), \\ {}^{\exists}c_2 \in (\xi, x_2);\ \ \frac{f(x_2) - f(\xi)}{x_2 - \xi} &= f'(c_2). \end{aligned}$$
$f'' > 0$ より $f'(x)$ は $I$ 上増加関数で, $c_1 < \xi < c_2$ より $f'(c_1) < f'(c_2)$. ゆえに
$$\frac{f(\xi) - f(x_1)}{\xi - x_1} < \frac{f(x_2) - f(\xi)}{x_2 - \xi}$$
が成り立つ. これを整理すれば,
$$f((1-t)x_1 + tx_2) < (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$
となり, 結論を得る.

**問 10.** $\log(1+x)$ $(x > -1)$ にテイラーの定理を適用すると,
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1} + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\theta x}\right)^n x^n \quad (0 < \theta < 1).$$
上において $x$ を $\frac{1}{x}$ に置き換えると,
$$\begin{aligned} \log(1+\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + \cdots &+ (-1)^{n-2}\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \\ &+ (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{1+\theta/x}\right)^n \frac{1}{nx^n} \quad (0 < \theta < 1). \end{aligned}$$
よって
$$\begin{aligned} x - x^2\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = x - \Bigg\{ x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + \cdots &+ (-1)^{n-2}\frac{1}{(n-1)x^{n+1}} \\ &+ (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{1+\theta/x}\right)^n \frac{1}{nx^{n+2}} \Bigg\} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**問 11.** $f(x)$ は $C^2$ 級なので, テイラーの定理より
$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a+\theta h)}{2!}h^2, \\ f(a-h) &= f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a-\theta h)}{2!}h^2 \end{aligned}$$

を満たす $0<\theta<1$ が存在する．ゆえに，

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2} &= \frac{1}{2}(f''(a+\theta h)+f''(a-\theta h)) \\ &\xrightarrow{h\to 0} f''(a) \qquad (\because\ f''\text{は連続})\end{aligned}$$

問 **12.** (1)

$$x_0=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

とおく．$f(x)$ は 2 回微分可能なので，テイラーの定理より，各 $x_k$ $(1\le k\le n)$ に対して，

$$f(x_k)=f(x_0)+(x_k-x_0)f'(x_0)+\frac{1}{2}(x_k-x_0)^2f''(c_k)$$

となる $c_k\in(x_0,x_k)$ が存在する．各 $k=1,2,\dots,n$ について，この式を辺々加えると

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)=nf(x_0)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_0)^2f''(c_k).$$

したがって，

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}-f(x_0)=\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_0)^2f''(c_k)\ge 0.$$

等号成立は $x_k=x_0$ $(k=1,2,\dots,n)$ のときのみ．

(2) 上の結果を $f(x)=-\log x$ $(x>0)$ に適用すると

$$-\frac{\log x_1+\log x_2+\cdots+\log x_n}{n}=-\log\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right).$$

よって

$$(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}\le\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

問 **13.** (1)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}x\log\frac{x-a}{x+a} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\log\frac{x-a}{x+a}}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2a}{x^2-a^2}}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} \qquad (\because\ \text{ロピタル}) \\ &= \lim_{x\to\infty}-2a\frac{x^2}{x^2-a}=-2a\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x^2-a}\right)=-2a.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan^2x\log\sin x &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\log\sin x}{\frac{1}{\cos^2x}} \\ &= -\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\sin^2x\tan x}} \qquad (\because\ \text{ロピタル}) \\ &= -\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin^2x=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\log x^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} \qquad (\because\ \text{ロピタル})\\ &=0.\end{aligned}$$

よって $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$.

(4)

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x} = \frac{x+\sin x}{x}\cdot\frac{x-\sin x}{x^3}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2.$$

ここで,

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 2,\\ &\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{6},\\ &\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 = 1.\end{aligned}$$

したがって, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right\} = \frac{1}{3}$.

(5)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x(x+1)} - \frac{\log(1+x)}{x^2}\right\} &= \lim_{x\to 0}\frac{x-(x+1)\log(1+x)}{x^2(x+1)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\log(1+x)-1}{3x^2+2x} \qquad (\because\ \text{ロピタル})\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{1+x}}{6x+2} \qquad (\because\ \text{ロピタル})\\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

**問 14.** (1) $f(x)$ は $x=\alpha$ で極大とする. すなわち,

$$|x-\alpha|<\delta \Longrightarrow f(x)\le f(\alpha)$$

となる $\delta>0$ が存在すると仮定する. このとき, $f(x)$ は微分可能なので,

$$f'(\alpha) = \lim_{x\to\alpha+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\le 0, \qquad f'(\alpha) = \lim_{x\to\alpha-}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\ge 0.$$

よって $f'(\alpha)=0$ が成り立つ. 極小の場合も同様.

(2) $x\in(\alpha-\delta,\alpha)$ とすると, 平均値の定理より

$${}^{\exists}\beta\in(x,\alpha);\ \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = f'(\beta).$$

$x-\alpha<0$ かつ, 仮定より $f'(\beta)>0$ なので, $f(x)<f(\alpha)$ となる.

同様に, $x\in(\alpha,\alpha+\delta)$ とすると,

$${}^{\exists}\gamma\in(\alpha,x);\ \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = f'(\gamma)<0.$$

よって $f(x)<f(\alpha)$. 以上より, $f(x)$ は $\alpha$ で極大となる.

**問 15.** (1) $|h|$ を十分小とすると, テイラーの定理より, ある $0<\theta<1$ が存在して,

$$
\begin{aligned}
f(\alpha+h)-f(\alpha) =& \frac{f(\alpha)}{1!}h+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}h^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\alpha+\theta h)}{n!}h^n \\
=& \frac{f^{(n)}(\alpha+\theta h)}{n!}h^n.
\end{aligned}
$$

$|h|$ が十分小さいときは $f^{(n)}(\alpha+\theta h)$ と $f^{(n)}(\alpha)$ が同符号であることと, $n$ が偶数なので $h^n>0$ であることを合わせると,

$$
\begin{aligned}
&f^{(n)}(\alpha)<0 \text{ ならば, } f(\alpha+h)<f(\alpha) \text{ となるので, } f \text{ は}\alpha\text{で極大,} \\
&f^{(n)}(\alpha)>0 \text{ ならば, } f(\alpha+h)>f(\alpha) \text{ となるので, } f \text{ は}\alpha\text{で極小となる.}
\end{aligned}
$$

(2) $f'$ は $C^{n-1}$ 級関数なので, $f'$ にテイラーの定理を適用すると, 上と同様に, ある $0<\theta<1$ が存在して,

$$
f'(\alpha+h)=\frac{f^{(n)}(\alpha+\theta h)}{(n-1)!}h^{n-1}.
$$

$|h|$ が十分小さいときは $f^{(n)}(\alpha+\theta h)$ と $f(\alpha)$ は同符号であることと, $n$ が奇数なので $h^{n-1}>0$ であることを合わせると,

$$
\begin{aligned}
&f^{(n)}(\alpha)<0 \text{ ならば, } 0<|x-\alpha|<h \text{ となる任意の } x \text{ で } f'(x)<0, \\
&f^{(n)}(\alpha)>0 \text{ ならば, } 0<|x-\alpha|<h \text{ となる任意の } x \text{ で } f'(x)>0.
\end{aligned}
$$

となる. よって問 14-(1) より, $f$ は $\alpha$ で極値をとらないことがわかる.