微分積分学 2(微分)

1　微分可能

定義 (微分可能, 微分係数, 導関数, C^n 級, 極大, 極小)

- a およびその近くで定義されている関数 $f(x)$ について,

  $f(x)$ が $x=a$ で**微分可能** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists \lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=:f'(a)$

  $f'(a)$ を $x=a$ における $f(x)$ の**微分係数**という.
- $f(x)$ が区間 I で微分可能 $\overset{\text{def}}{\iff}$ I の各点で微分可能.

  このとき, $f'(x)$ を $f(x)$ の**導関数**という.
- $f(x)$ が n **回微分可能** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $f^{(n-1)}(x)$ が微分可能.

  n 階導関数を $f^{(n)}(x)$ で表す.
- $f(x)$ が C^n **級** $\overset{\text{def}}{\iff}$ n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ が連続.

問 1. $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば, $f(x)$ は $x=a$ で連続であることを示せ.

問 2. 次を示せ.

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能である

$$\iff \begin{cases} \text{(i)} & f(a+h)=f(a)+Ah+h\omega(h) \\ \text{(ii)} & \lim_{h\to 0}\omega(h)=0 \end{cases}$$ を満たす関数 $\omega(h)$ と定数 A が存在する.

問 3. 関数 $f(x), g(x)$ は $x=a$ で微分可能であるとする. このとき次を示せ.

(1) $f(x)\pm g(x)$ は $x=a$ で微分可能で, 次が成り立つ:

$$(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a).$$

(2) $f(x)g(x)$ は $x=a$ で微分可能で, 次が成り立つ:

$$(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a).$$

(3) $g(a)\neq 0$ ならば, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ は $x=a$ も微分可能で, 次が成り立つ:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

問 4. 次の関数 $f(x)$ の区間 I での微分可能性をそれぞれ調べよ.

(1) $f(x)=\sqrt{x},\quad I=[0,\infty)$　(2) $f(x)=|x|,\quad I=\mathbb{R}$　(3) $f(x)=\sqrt{1-x^2},\quad I=[-1,1]$

問 5. 次の $f(x)$ は $\mathbb{R}$ で微分可能であるが, $f'(x)$ は $x=0$ で不連続であることを示せ.

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

問 6. $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば

$$\lim_{h,k\to 0+} \frac{f(a+h)-f(a-k)}{h+k} = f'(a)$$

が成り立つことを示せ.

2 平均値の定理

定理 2.1 (ロルの定理)**.** $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続, 開区間 (a,b) で微分可能で $f(a)=f(b)$ を満たすならば,

$$^{\exists}c \in (a,b);\ f'(c)=0.$$

定理 2.2 (平均値の定理)**.** $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で連続, 開区間 (a,b) で微分可能ならば,

$$^{\exists}c \in (a,b);\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

問 7. 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続, 開区間 (a,b) で微分可能とする. このとき,

$$f' \equiv 0 \text{ on } (a,b) \Longrightarrow f(x) : \text{定数関数}$$

が成り立つことを示せ.

問 8. (1) 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続, 開区間 (a,b) で微分可能とする. このとき,

$$f' > 0 \text{ on } (a,b) \Longrightarrow f(x) : \text{単調増加関数}$$

が成り立つことを示せ.

(2) $x>0$ のとき

$$\log(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$$

が成り立つことを示せ.

問 9. 関数 $f(x)$ はある開区間 I でつねに $f''(x)>0$ とする. このとき, $f(x)$ は I 上で狭義凸関数であること示せ. ただし,

$$f(x) \text{ が } I \text{ で狭義凸関数} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^{\forall}x_1, x_2 (x_1 < x_2) \text{ and } {}^{\forall}t \in (0,1),$$
$$f((1-t)x_1 + tx_2) < (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

3　テイラーの定理

定理 3.1 (テイラーの定理)**.** $f(x)$ は開区間 I で n 回微分可能とする． ${}^{\forall}a, b \in I;\ a < b,\ {}^{\exists}c \in (a,b);$

$$\begin{aligned} f(b) =& \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n \\ =& f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(b-a)^2 \\ & + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n. \end{aligned}$$

系 3.1 (テイラーの定理の系)**.** $f(x)$ は $x = a$ を含むある開区間 U で n 回微分可能であるとする．このとき次が成り立つ:
${}^{\forall}x \in U,\ {}^{\exists}\theta = \theta_{a,x,n}\ (0 < \theta < 1);$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n.$$

問 10. $\log(1+x)$ に対するテイラーの定理を用いて次の極限を求めよ．

$$\lim_{x\to\infty} \left\{ x - x^2 \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right\}.$$

問 11. $f(x)$ が $x = a$ の近くで C^2 級ならば

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = f''(a)$$

が成り立つことを示せ.

問 12. (1) 関数 $f(x)$ は 2 回微分可能で, ある区間 I でつねに $f''(x) > 0$ とする．このとき, 任意の $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ に対して

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)$$

が成り立つことを示せ.

(2) $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ ならば

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

が成り立つことを示せ.

定理 3.2 (ロピタルの定理)**.** 関数 $f(x), g(x)$ が区間 (a, b) で微分可能で, $g'(x) \neq 0$ かつ

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0 \quad \text{または} \quad \lim_{x \to a+} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \to a+} g(x) = \pm\infty$$

とする. このとき,

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成り立つ ($x \to a+$ を $x \to b-$ にかえても, $x \to \pm\infty$ にかえても同様の結論が成り立つ).

問 13. 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x \log \frac{x-a}{x+a}$ (2) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan^2 x \log \sin x$ (3) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x^{1/x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$ (5) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{\log(1+x)}{x^2} \right)$

4 極値

定義 (極値)

関数 $f(x)$ が $x = \alpha$ で**極大** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^{\exists}\delta > 0;\ |x - \alpha| < \delta \Longrightarrow f(x) \leq f(\alpha)$
関数 $f(x)$ が $x = \alpha$ で**極小** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^{\exists}\delta > 0;\ |x - \alpha| < \delta \Longrightarrow f(x) \geq f(\alpha)$
$f(x)$ が $x = \alpha$ で極大 (極小) のとき, $f(\alpha)$ を**極大値** (**極小値**) という.

問 14. (1) $f(x)$ が $x = \alpha$ で微分可能で極値をとるならば, $f'(\alpha) = 0$ であることを示せ.
(2) 連続関数 $f(x)$ が, 定義域のある 1 点 α の周りで微分可能とする. このとき,

$${}^{\forall}x \in (\alpha - \delta, \alpha),\ f'(x) > 0 \quad \text{かつ} \quad {}^{\forall}x \in (\alpha, \alpha + \delta),\ f'(x) < 0$$

が成り立つならば, $f(x)$ は $x = \alpha$ で極大であることを示せ.

問 15. $n \geq 2$ とする. $f \in C^n(a, b)$ と $\alpha \in (a, b)$ が

$$f'(\alpha) = f''(\alpha) = \cdots = f^{(n-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{かつ} \quad f^{(n)}(\alpha) \neq 0$$

を満たすとする.

(1) n が偶数ならば, f は α で極値をとることを示せ.
(2) n が奇数ならば, f は α で極値をとらないことを示せ.

参考文献

[1] 小池 茂昭, 微分積分, 数学書房, 2010.
[2] 田島 一郎, 解析入門, 岩波全書, 1981.
[3] 難波 誠, 微分積分学, 裳華房, 1996.