微分積分学 1 略解

問 1. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \in \mathbb{N}$ ととると, 任意の $n \geq N$ に対し,

$$\begin{aligned} |a_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq & \frac{1}{[1/\varepsilon]+1} \qquad (\because\ n \geq N) \\ < & \varepsilon, \end{aligned}$$

ここで, 記号 $[x]$ は x を越えない最大の整数を表わす:

$$[x] := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}.$$

よって a_n は 0 に収束する[*1].

問 2. 仮定より, $^\forall\varepsilon > 0,\ ^\exists N_1 \in \mathbb{N}$ s.t. $^\forall n \geq N_1,\ |a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ. よって $^\forall\varepsilon > 0$ に対し,

$$\begin{aligned} n \geq N_1 \Longrightarrow ||a_n| - |\alpha|| \leq & |a_n - \alpha| \qquad (\because\ \text{三角不等式}) \\ < & \varepsilon. \end{aligned}$$

よって $|a_n| \to |\alpha|$ $(n \to \infty)$ が成り立つ.

問 3. $b_n = a_n - \alpha$ とおくと, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ なので,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} = 0$$

が成り立つことを示せばよい. 仮定より

$$^\forall\varepsilon > 0,\ ^\exists N \in \mathbb{N};\ ^\forall n \geq N,\ |b_n| < \varepsilon$$

が成り立つ. また, 次を満たす $N' \in \mathbb{N}$ が存在する[*2].

$$^\forall n \geq N',\ \left|\frac{b_1 + \cdots + b_{N-1}}{n}\right| < \varepsilon$$

よって任意の $n \geq \max\{N, N'\}$ に対し

$$\begin{aligned} \left|\frac{b_1 + \cdots + b_n}{n}\right| =& \left|\frac{b_1 + \cdots + b_{N-1}}{n} + \frac{b_N + \cdots + b_n}{n}\right| \\ \leq& \left|\frac{b_1 + \cdots + b_{N-1}}{n}\right| + \frac{|b_N| + \cdots + |b_n|}{n} \qquad (\because\ \text{三角不等式}) \\ <& \varepsilon + \frac{n - N + 1}{n}\varepsilon < \varepsilon + \frac{n+1}{n}\varepsilon = \varepsilon + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\varepsilon \leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

問 4. 仮定より,

$$^\forall M > 0,\ ^\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } ^\forall n \geq N,\ a_n > 2M$$

[*1] $[1/\varepsilon]$ の定義より,

$$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \leq \frac{1}{\varepsilon} < \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1. \qquad \therefore\ \frac{1}{[1/\varepsilon]+1} < \varepsilon.$$

[*2] $b_1 + \cdots + b_{N-1}$ は定数なので $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b_1 + \cdots + b_{N-1}}{n} = 0$.

が成り立つ. このとき,

$$\begin{aligned}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} =& \frac{a_1+\cdots+a_{N-1}+a_N+a_{N+1}+\cdots+a_n}{n} \\ >& \frac{a_1+\cdots+a_{N-1}+(n-N)2M}{n} \\ =& 2M-\frac{2MN-(a_1+\cdots+a_{N-1})}{n}\end{aligned}$$

よって $N' \geq 2N - \dfrac{a_1+\cdots+a_{N-1}}{M}$ となる $N' \in \mathbb{N}$ をとれば, ${}^\forall n \geq N'$ に対して

$$\geq 2M - M = M.$$

問 5. 仮定より

$${}^\forall\varepsilon > 0,\ {}^\exists N \in \mathbb{N};\ {}^\forall n \geq N,\ |a_n - a| < \varepsilon$$

が成り立つ. $\varepsilon = \dfrac{a}{2}$ とすると

$$\begin{aligned}&|a_n - a| < \frac{a}{2} \\ \therefore\ & -\frac{a}{2} < a_n - a \\ \therefore\ & a_n > -\frac{a}{2} + a = \frac{a}{2} > 0.\end{aligned}$$

問 6. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, すなわち

$${}^\forall\varepsilon > 0,\ {}^\exists N \in \mathbb{N};\ {}^\forall n \geq N,\ |a_n - a| < \varepsilon$$

とする. 背理法で示す. $a > \alpha$ と仮定する. このとき, $|a_n - a| < \varepsilon$ より

$$\begin{aligned}a_n - \varepsilon < a <& a_n + \varepsilon \\ \leq& \alpha + \varepsilon \qquad (\because\ a_n < \alpha \quad (n = 1, 2, \ldots))\end{aligned}$$

今, 仮定より $a - \alpha > 0$ なので $\varepsilon = a - \alpha$ とおくと,

$$< \alpha + a - \alpha = a$$

となり矛盾する. したがって $a \leq \alpha$ が成り立つ.

問 7. (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right) = \frac{1}{2}.$

解答.

$$n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right) = n\left(\frac{1+\frac{1}{n}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

□

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\left(1+\frac{a}{n}\right)^k - 1\right) = ka.$

解答. 二項定理より

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{a}{n}\right)^k &= \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\cdot\left(\frac{a}{n}\right)^l \\ &= 1+k\left(\frac{a}{n}\right)+\frac{k(k-1)}{2!}\left(\frac{a}{n}\right)^2+\cdots+k\left(\frac{a}{n}\right)^{n-1}+\left(\frac{a}{n}\right)^n.\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}n\left(\left(1+\frac{a}{n}\right)^k-1\right) &= n\left(k\left(\frac{a}{n}\right)+\frac{k(k-1)}{2!}\left(\frac{a}{n}\right)^2+\cdots+k\left(\frac{a}{n}\right)^{n-1}+\left(\frac{a}{n}\right)^n\right) \\ &= ka+\frac{k(k-1)a^2}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+ka^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^{n-2}+a^n\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} ka.\end{aligned}$$

□

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=1.$

解答.

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\xrightarrow{n\to\infty} e$$

より ${}^\forall\varepsilon>0$ に対して $n\in\mathbb{N}$ が存在して, ${}^\forall n\geq N$ に対して

$$1<\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}<e+\varepsilon$$

が成り立つ. ゆえに[*3]

$$1<\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{1/n}\leq e^{1/n}.$$

$\lim_{n\to\infty}(2e)^{1/n}=1$ より結論を得る. □

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{\sqrt{n}}\right)^n=\begin{cases}0, & a<0\\ 1, & a=0\\ \infty, & a>0.\end{cases}$

解答. $a=0$ のときは明らかに極限は 1. $a\neq 0$ のとき, $t=\frac{\sqrt{n}}{a}$ とおくと,

$$\left(1+\frac{a}{\sqrt{n}}\right)^n=\left(1+\frac{1}{t}\right)^{ta\sqrt{n}}=\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^{a\sqrt{n}}=\begin{cases}\infty, & a>0\\ 0, & a<0\end{cases}$$

$a>0$ のとき, 前問と同様の議論により,

$$e^{a\sqrt{n}}\leq\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^{a\sqrt{n}}\qquad \text{かつ}\qquad e^{a\sqrt{n}}\to\infty$$

から ∞ に発散することがわかる.

[*3] $a,b\in\mathbb{R}$. ${}^\forall\varepsilon>0, |a|<b+\varepsilon\Rightarrow|a|\leq b$.

$a<0$ のとき, $a=-b, t=-\frac{\sqrt{n}}{b}$ とおくと

$$\left(1+\frac{a}{\sqrt{n}}\right)^n=\left(1-\frac{b}{\sqrt{n}}\right)^n=\left\{\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^{b\sqrt{n}}\right\}^{-1}.$$

$b>0$ より, 上の結果からこれが 0 に収束することがわかる. □

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1)=\log a.$

解答. $a>1$ のとき, $a_n=n(\sqrt[n]{a}-1)$ とおくと $\sqrt[n]{a}-1=\dfrac{a_n}{n}>0$. ゆえに, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$. よって, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{a_n}=\infty$. また, $\sqrt[n]{a}=1+\dfrac{a_n}{n}$ より

$$a=\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n=\left\{\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^{n/a_n}\right\}^{a_n}.$$

両辺対数をとって整理すると

$$a_n=\frac{\log a}{\log\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^{n/a_n}}\xrightarrow{n\to\infty}\log a.$$

$1>a>0$ のとき, $a=\frac{1}{b}$ とおくと $b>1$ なので, 上の結果より,

$$n(\sqrt[n]{a}-1)=n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{b}}-1\right)=\frac{n(1-\sqrt[n]{b})}{\sqrt[n]{b}}\xrightarrow{n\to\infty}(-\log b)=\log a.$$

□

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n}=\pi.$

解答.

$$n\sin\frac{\pi}{n}=\pi\left(\frac{\pi}{n}\right)^{-1}\sin\frac{\pi}{n}\xrightarrow{n\to\infty}\pi.$$

□

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na^n=\begin{cases}\text{発散}, & a\le -1\\ 0 & |a|<1\\ \infty & a\ge 1.\end{cases}$

解答.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{(n+1)a^{n+1}}{na^n}\right|=\left(1+\frac{1}{n}\right)|a|\xrightarrow{n\to\infty}|a|.$$

よって $|a|<1$ ならば 0 に収束, $a\le -1$ ならば発散, $a\ge 1$ ならば ∞ に発散. □

(8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3}=\frac{4}{3}.$

解答.

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)+n=\frac{4}{3}n^3+[2\text{ 次以下の項}]$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3}=\frac{4}{3}.$$

□

問 8. (1) $\inf S_1 = \min S_1 = \dfrac{1}{2}$, $\sup S_1 = 1$, $\max S_1$ は存在しない.

解答. $\sup S_1 = 1$ のみ示す (定義における (i),(ii) を示す).

$$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1 \notin S_1$$

より 1 は上界である. 一方, $^\forall \varepsilon > 0$ に対し,

$$\varepsilon < \frac{1}{N+1}$$

となる $N \in \mathbb{N}$ が存在する. よって

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{N+1} \in S_1$$

が成り立つ. 以上より $\sup S_1 = 1$ を得る. $1 \notin S_1$ より最大値はなし. $\square$

(2) $\inf S_2 = 0$, $\min S_2$ はなし, $\sup S_2 = \sqrt{2}$, $\max S_2$ はなし.

解答. $S_2 = (0, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$. かつ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ より結果を得る. $\square$

(3) $\inf S_3 = 1$, $\min S_3$, $\sup S_3$, $\max S_3$ はなし.

解答. $^\forall R \in \mathbb{R}$, $^\exists N \in \mathbb{N}$; $R \leq N$ なので

$$R \leq M < M + \frac{1}{n} \in S_3$$

が成り立つ. よって S_3 は上界をもたない.

次に $\inf S_3 = 1$ を示す. 任意の $n, m \in \mathbb{N}$ に対し

$$1 < m + \frac{1}{n}$$

が成り立つので, 1 は S_3 の下界である. $^\forall \varepsilon > 0$ に対して $\varepsilon > 1 + \dfrac{1}{N}$ となる $N \in \mathbb{N}$ をとると

$$1 + \varepsilon > 1 + \frac{1}{N} \in S_3$$

である. 以上より $\inf S_3 = 1$ である. $1 \notin S_3$ より最小値はなし. $\square$

問 9.

$$(1)\ [1,2) \quad (2)\ \{1\} \quad (3)\ \emptyset \quad (4)\ \{2\}$$

問 10. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とする. このとき

$$^\forall \varepsilon > 0,\ ^\exists N \in \mathbb{N};\ ^\forall n \geq N,\ |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ. このとき, $|a_n - \alpha| \geq |a_n| - |\alpha|$ より, $^\forall n \geq N$ に対し

$$|a_n| < |\alpha| + \varepsilon$$

となる. よって $M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, |\alpha| + \varepsilon\}$ とおけば, 任意の n に対し

$$|a_n| < M$$

となる.

問 11. 上限の定義より,

$$^\forall n \in \mathbb{N},\ ^\exists x \in S;\ \alpha - \frac{1}{n} < x \leq \alpha$$

が成り立つ. 数列 $\{a_n\}$ を次のように定義する: $\alpha-1<x<\alpha$ を満たす x を a_1 とし, a_n $(n\geq 2)$ を

$$\alpha-\frac{1}{n}<a_n<\alpha \quad \text{かつ} \quad a_{n-1}\leq a_n$$

を満たすようにとる. このとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha-\frac{1}{n}=\alpha$ より, はさみうちの原理から, $\{a_n\}\uparrow\alpha$ $(n\to\infty)$ となる.

問 12. まず, $\{a_n\}$ がコーシー列である (すなわち $\{a_n\}$ が収束する) ことを示す. 実際,

$$\begin{aligned}|a_{n+1}-a_n|=&\left|\frac{1}{1+a_n}-\frac{1}{1+a_{n+1}}\right|=\left|\frac{a_{n-1}-a_n}{(1+a_n)(1+a_{n-1})}\right|\\=&\frac{1}{(1+a_n)(1+a_{n-1})}|a_{n+1}-a_n|\end{aligned}$$

ここで, 任意の n に対して $1>a_{n+1}=\dfrac{1}{1+a_n}\geq\dfrac{1}{1+a_1}=\dfrac{1}{2}$ なので,

$$\leq\frac{1}{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2})}|a_{n+1}-a_n|=\left(\frac{2}{3}\right)^2|a_{n-1}-a_n|.$$

ゆえに,

$$|a_{n+1}-a_n|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^2|a_n-a_{n-1}|\leq\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}|a_2-a_1|.$$

よって, $n<m$ に対して

$$\begin{aligned}|a_m-a_n|\leq&|a_m-a_{m-1}|+|a_{m-1}-a_{m-2}|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|\\\leq&\left\{\left(\frac{4}{9}\right)^{m-2}+\cdots+\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right\}|a_2-a_1|\\\leq&\frac{9}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}|a_2-a_1|\xrightarrow[n\to\infty]{}0.\end{aligned}$$

したがって $\{a_n\}$ はコーシー列であるから収束する. $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha\geq 0$ とおくと $\alpha=\dfrac{1}{1+\alpha}$ をみたす. これを α について解くと $\alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ を得る.

■関数の極限

問 13. (a) 仮定より, ${}^\forall\varepsilon>0$ に対して

$$\begin{aligned}{}^\exists\delta_1>0;\ |{}^\forall x-a|<\delta_1,\ |f(x)-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}\\{}^\exists\delta_2>0;\ |{}^\forall x-a|<\delta_2,\ |g(x)-\beta|<\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

が成り立つ. よって, $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ とすると, $|{}^\forall x-a|<\delta$ に対して

$$\begin{aligned}|f(x)\pm g(x)-(\alpha\pm\beta)|=&|f(x)-\alpha\pm(g(x)-\beta)|\\\leq&|f(x)-\alpha|+|g(x)-\beta|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$ より, a の十分近くの x に対して, $|f(x)-\alpha|\leq M$ となる $M>0$ が存在する.

また, 再び仮定より, ${}^\forall\varepsilon > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
&{}^\exists\delta_3 > 0;\ |{}^\forall x - a| < \delta_3,\ |f(x) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|}\\
&{}^\exists\delta_4 > 0;\ |{}^\forall x - a| < \delta_4,\ |g(x) - \beta| < \frac{\varepsilon}{2M}
\end{aligned}$$

が成り立つ. よって, $\delta = \min\{\delta_3, \delta_4\}$ とすると, $|{}^\forall x - a| < \delta$ に対して

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - \alpha\beta| \le& |f(x)g(x) - f(x)\beta| + |f(x)\beta - \alpha\beta|\\
=& |f(x)| \cdot |g(x) - \beta| + |\beta| \cdot |f(x) - \alpha|\\
<& M\frac{\varepsilon}{2M} + |\beta|\frac{\varepsilon}{2|\beta|} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

(c) 仮定より,

$${}^\forall\varepsilon > 0,\ {}^\exists\delta > 0;\ |{}^\forall x - a| < \delta,\ |f(x) - \alpha| < \min\left\{\frac{|\alpha|^2\varepsilon}{2}, \frac{|\alpha|}{2}\right\}$$

が成り立つ. よって $|{}^\forall x - a| < \delta$ に対して

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\alpha}\right| =& \frac{|f(x) - \alpha|}{|\alpha f(x)|}\\
<& \frac{(|\alpha|^2\varepsilon)/2}{|\alpha|^2/2} \qquad \left(\because\ |f(x) - \alpha| < \frac{\alpha}{2} \text{ より } \frac{|\alpha|}{2} < |f(x)|\right)\\
=& \varepsilon.
\end{aligned}$$

問 14. (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \frac{1}{2}.$

解答.

$$\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \sqrt{x}\left(\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{1}{2}.$$

□

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{[\sqrt{x}]}{\sqrt{[x]}} = 1.$

解答. $[x]$ の定義より $x - 1 < [x] \le x$ であることに注意すると,

$$\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} < \frac{[\sqrt{x}]}{\sqrt{[x]}} \le \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}.$$

このとき,

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) =& 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x\to\infty} 1,\\
(\text{右辺}) =& \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}}} \xrightarrow{x\to\infty} 1
\end{aligned}$$

なので

$$\lim_{x\to\infty} \frac{[\sqrt{x}]}{\sqrt{[x]}} = 1.$$

□

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a.$

解答. $t = x/a$ とおくと,

$$\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \left(1+\frac{1}{t}\right)^{ta} \xrightarrow{x\to\pm\infty} e^a.$$

□

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x} = e.$

解答. 対数をとると

$$\frac{1}{x}\log(1+\sin x) = \frac{\sin x}{x}\frac{\log(1+\sin x)}{\sin x} \xrightarrow{x\to 0} 1.$$

したがって結果を得る. □

(5) $\displaystyle\lim_{x\to +0} x\log x = 0$

解答. $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t} = 0$ より[*4], $e^{-t} = x$ とおくと

$$x\log x = \frac{-t}{e^t} \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

□

(6) $\displaystyle\lim_{x\to +0} x^{\sin x} = 1$

解答. 対数をとると, (5) より

$$\sin x\log x = \frac{\sin x}{x}\cdot x\log x \xrightarrow{x\to +0} 0.$$

□

問 15. $f(x)$ は上に有界なので, $\sup\{f(x) \mid x \in (a,b)\}$ が存在する. これを M とおくと $\displaystyle\lim_{x\to b-0} f(x) = M$ となる. 以下これを示す. 上限の定義より

$$^\forall\varepsilon > 0,\ ^\exists y \in (a,b);\ M-\varepsilon < f(y)$$

が成り立つので, $\delta = b-y > 0$ とすると, $^\forall x > b-\delta$ に対して

$$|f(x)-M| = M - f(x)$$

ここで, $x > b-\delta = b-(b-y) = y$ より, 単調増加性から $f(y) < f(x)$ なので,

$$\begin{aligned} &< M - f(y) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

したがって結論を得る.

■連続関数

[*4] $t < 2^t$ より

$$0 < \frac{t}{e^t} < \frac{2^t}{e^t} = \left(\frac{2}{e}\right)^t \xrightarrow{t\to\infty} 0.$$

問 16. 任意の $a \in \mathbb{R}$ と $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta > 0$ を

$$\delta = \min\left\{1, \frac{1}{2|a|+1}\right\}$$

ととると, $|x-a| < \delta$ を満たす任意の x について

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x+a||x-a| < (2|a|+1)\delta < \varepsilon$$

となる. ここで, $|x-a| < \delta$ より

$$2a - \delta < x + a < 2a + \delta, \qquad \therefore\ |x+a| < 2|a| + \delta$$

であることと, $\delta \leq 1$ より $2|a| + \delta \leq 2|a| + 1$ であることを用いた.

したがって $f(x) = x^2$ は連続関数である.

問 17.

$$\varepsilon > 0,\ {}^{\exists}\delta > 0;\ |{}^{\forall}x - a| < \delta,\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

が成り立っていることに注意する. このとき,

$$f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$$

となるので, ${}^{\forall}M > f(a)$ に対して $\varepsilon = M - f(a) > 0$ とすれば $f(x) < M$ が成り立つ.

問 18. (1) $x = 0$ で不連続である.

解答. ${}^{\forall}n \in \mathbb{N}$ に対し, $x = \dfrac{1}{n\pi}$ のとき

$$f(x) = \sin n\pi = 0,$$

$x = \dfrac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}$ のとき

$$f(x) = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) = \pm 1$$

となるので $\lim_{x\to 0} f(x)$ は存在しない. したがって $x = 0$ で不連続である. □

(2) 連続関数である.

解答. $x = 0$ での連続性のみ示す. ${}^{\forall}x \neq 0$ に対し

$$|f(x) - f(0)| = \left|x \sin\frac{1}{x}\right| \leq |x|.$$

よって

$$\lim_{x\to 0} |f(x) - f(0)| = 0.$$

したがって $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ を得る. □

(3) 任意の点で不連続である.

解答. ${}^{\forall}a \in \mathbb{Q}$ に対し, $f(x)$ は $x = a$ で不連続であることを示す. $\varepsilon = 1$ とすると, ${}^{\forall}\delta > 0$ に対し, 無理数の稠密性より $a < \alpha < a + \delta$ となる無理数 α が存在する. このとき,

$$|\alpha - a| < \delta \quad \text{かつ} \quad |f(\alpha) - f(a)| = |0 - 1| = 1 \geq \varepsilon$$

となる. よって $f(x)$ は $x = a$ で不連続である.
無理数における不連続性も同様に示せる. □

(4) 任意の有理数点で不連続である.

解答. 任意の $a=\dfrac{p}{q}$ で不連続であることを示す. $\varepsilon=\frac{1}{q}$ とすると, ${}^\forall\delta>0$ に対し, 無理数の稠密性より $a<\alpha<a+\delta$ となる無理数 α が存在する. このとき,

$$|\alpha-a|<\delta \quad \text{かつ} \quad |f(\alpha)-f(a)|=\left|0-\frac{1}{q}\right|=\frac{1}{q}\geq\varepsilon$$

となる. よって $f(x)$ は $x=a$ で不連続である. □

問 19. $f(a)>0$ とする. $f(x)$ は $x=a$ で連続, すなわち

$$\varepsilon>0,\ {}^\exists\delta>0;\ |{}^\forall x-a|<\delta,\ |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

なので,

$$f(a)-\varepsilon<f(x)<f(a)+\varepsilon$$

となる. 今, $\varepsilon=\dfrac{f(a)}{2}>0$ とおくと, $|x-a|<\delta$ となる任意の x に対し

$$f(a)-\frac{f(a)}{2}<f(x)<f(a)+\frac{f(x)}{2}$$
$$\therefore\ \frac{f(a)}{2}<f(x)<\frac{3}{2}f(x).$$

したがって, $f(a)>0$ ならば a の十分近くの x に対して $f(x)>0$ である. $f(a)<0$ の場合も同様に示せる.

問 20.

(1) $f(x)$: conti. on $[a,b]$ and $f(a)<f(b)\implies {}^\forall y\in(f(a),f(b)),\ {}^\exists x\in(a,c);\ f(c)=y.$

(2) $f(x)$: conti. on $[a,b]\implies {}^\exists c,d\in[a,b];\ {}^\forall x\in[a,b],\ f(c)\leq f(x)\leq f(d).$

問 21. $g(x)=f(x)-x$ とおく. このとき仮定から

$$g(a)=f(a)-a\geq 0 \quad \text{かつ} \quad g(b)=f(b)-b\leq 0$$

となる. $g(a)=0$ または $g(b)=0$ のとき,

$$f(a)=a, \qquad f(b)=b$$

となる. 一方, $g(a)>0$ かつ $g(b)<0$ のとき, 中間値の定理より

$${}^\exists c\in(a,b);\ g(c)=f(c)-c=0.$$

したがって結論を得る.

問 22. 実数 a,b に対し,

$$\max\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|), \quad \min\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$$

なので,

$$(f\vee g)(x)=\frac{1}{2}(f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|),$$
$$(f\wedge g)(x)=\frac{1}{2}(f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|).$$

連続関数の和と差, および絶対値が連続関数であることより結論を得る.

問 23. $h(x) = f(x) - g(x)$ とおくと, 仮定より $h(x)$ は $\mathbb{Q} \cap I$ 上で連続である. $|h(a)| > 0$ となる無理数 $a \in I$ が存在すると仮定する. このとき, $\varepsilon = |h(a)|$ とおくと, 仮定より $|h(a)| > 0$ である. 任意の $\delta > 0$ に対し, 有理数の稠密性より $a < x < a + \delta$ となる $x \in \mathbb{Q} \cap I$ が存在する. このとき,

$$|x - a| < \delta \quad \text{かつ} \quad |h(x) - h(a)| = |0 - h(a)| = \varepsilon$$

が成り立つ. これは $h(x)$ の連続性に矛盾する. したがって, 任意の $x \in I$ に対して $h(x) = 0$.

問 24. (1) 一様連続である.

解答.

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \\ &\leq \frac{|x-y|}{|xy|} \\ &\leq |x - y|. \qquad (\because x \geq 1, y \geq 1)\end{aligned}$$

よって, ${}^\forall\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \varepsilon$ ととれば, $|x - y| < \delta$ となる任意の $x, y \in [1, \infty)$ に対し,

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

が成り立つ. □

(2) 一様連続ではない.

解答. (定義を参照)

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad y_n = \frac{1}{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

ととると, $x_n, y_n \in (0, 1]$ で,

$$\begin{aligned}|x_n - y_n| &= \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \\ |f(x_n) - f(y_n)| &= |n - (n+1)| = 1\end{aligned}$$

となる. よって一様連続でない. □

問 25.

$$x_n = \frac{2}{4n+1}, \quad y_n = \frac{2}{4n-1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

ととると, $x_n, y_n \in (0, 1)$ で,

$$\begin{aligned}|x_n - y_n| &= \left|\frac{2}{4n+1} - \frac{2}{4n-1}\right| = \frac{4}{(4n+1)(4n-1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \\ |f(x_n) - f(y_n)| &= \left|\sin\frac{\pi}{x_n} - \sin\frac{\pi}{y_n}\right| = \left|\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(2n\pi - \frac{\pi}{2}\right)\right| = 2\end{aligned}$$

となる. よって一様連続でない.

問 26. 背理法で示す. $f(x)$ は $[a, b]$ で連続かつ一様連続でない. すなわち,

$${}^\exists\varepsilon > 0;\ {}^\forall\delta > 0,\ x, y \in [a, b];\ |x - y| < \delta;\ |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

と仮定する．$\delta = 1/n$ ととると，

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{and} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$$

となる数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ が得られる．ワイエルストラスの定理より，$\{x_n\}$ は集積点 $c \in [a, b]$ をもつ．今，$\{x_n\}$ の部分列で，c に収束するものを $\{x_{n_k}\}$ とする．$\{y_n\}$ の方も，この部分列と同じ番号の部分列 $\{y_{n_k}\}$ を選べば，

$$|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \leq \frac{1}{n}$$

より，$\{y_{n_k}\}$ も c に収束する．このとき，$f(x)$ が連続なので，

$$\lim_{n_k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(c) = \lim_{n_k \to \infty} f(y_{n_k})$$

であることから，

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(c)| + |f(c) - f(y_{n_k})| \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

となり，仮定に矛盾する．

問 27. ${}^{\forall}\varepsilon > 0$ に対し，$\delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0$ とおけばよい．