微分積分学 1(数列, 連続関数)

■記号など

- $P \overset{\text{def}}{\iff} Q$:「$P$ を Q で定義する」という意味.
- $P := Q$:「P を Q で定義する」という意味.
- $\mathbb{N} \overset{\text{def}}{\iff}$ 自然数全体の集合.
- $\mathbb{Z} \overset{\text{def}}{\iff}$ 整数全体の集合.
- $\mathbb{Q} \overset{\text{def}}{\iff}$ 有理数全体の集合.
- ${}^{\forall}P, Q$:「任意の P に対して Q である」
- ${}^{\exists}P$ s.t. Q :「Q となる P が存在する」または「P が存在して Q である」
  ”s.t.” は ”;” と略する.

1 数列

定義 (数列の収束・極限, 発散)

$$\text{数列 } \{a_n\} \text{ が } \alpha \text{ に}\textbf{収束する} \overset{\text{def}}{\iff} {}^{\forall}\varepsilon > 0,\ {}^{\exists}N \in \mathbb{N};\ {}^{\forall}n \geq N,\ |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

これを $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ または $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$, あるいは単に $a_n \to \alpha$ などと表す. α を数列 $\{a_n\}$ の**極限値**という.

また, 数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき, **発散する**という. 特に,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \overset{\text{def}}{\iff} {}^{\forall}M > 0,\ {}^{\exists}N \in \mathbb{N};\ {}^{\forall}n \geq N,\ a_n > M.$$

$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ も同様.

問 1. 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \dfrac{1}{n}$ と定義する. このとき,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

となることを定義に従って示せ.

問 2. $a_n \to \alpha$ ならば $|a_n| \to |\alpha|$ であることを示せ.

問 3. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ のとき,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \alpha$$

であることを示せ.

問 4. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ のとき,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \infty$$

であることを示せ.

問 5. $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$ とすると,

$$^{\exists}N;\ ^{\forall}n \geq N,\ a_n \geq \frac{a}{2} > 0$$

が成り立つことを示せ.

問 6. 収束する数列 $\{a_n\}$ が

$$a_n < \alpha \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

であるとき, $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \alpha$ であることを示せ.

問 7. 次の数列の $n \to \infty$ での極限を求めよ. ただし, $a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ とする.

(1) $n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)$ (2) $n\left(\left(1+\frac{a}{n}\right)^k - 1\right)$ (3) $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$ (4) $\left(1+\frac{a}{\sqrt{n}}\right)^n$

(5) $n\,(\sqrt[n]{a} - 1)$ $(a > 0)$ (6) $n \sin\frac{\pi}{n}$ (7) na^n (8) $\dfrac{1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2}{n^3}$

定義 (有界, 上限 (下限), 最大値 (最小値))

- 集合 S が上に有界 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $^{\exists}c;\ ^{\forall}x \in S,\ x \leq c.$
- 集合 S が下に有界 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $^{\exists}c;\ ^{\forall}x \in S,\ c \geq x.$
- 集合 S が有界 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ S が上にも下にも有界.
- $\alpha = \sup S \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \alpha = \min\{c; ^{\forall}x \in S, x \leq c\} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i) } ^{\forall}x \in S,\ x \leq \alpha \\ \text{(ii) } ^{\forall}\varepsilon > 0,\ ^{\exists}x;\ \alpha - \varepsilon < x \end{cases}$

α を集合 S の上限という. とくに, $\alpha \in S$ のとき, α を S の最大値という.

- $\beta = \inf S \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \beta = \max\{d; ^{\forall}x \in S, d \leq x\} \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{(i) } ^{\forall}x \in S,\ \beta \leq x \\ \text{(ii) } ^{\forall}\varepsilon > 0,\ ^{\exists}x;\ x < \beta + \varepsilon \end{cases}$

α を集合 S の下限という. とくに, $\alpha \in S$ のとき, α を S の最小値という.

問 8. 次の集合に上限, 下限, 最大値, 最小値が存在するかどうかを判定し, 存在する場合はその値を求めよ.

(1) $S_1 = \left\{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

(2) $S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x^2 \leq 2,\ 0 < x,\ x \in \mathbb{Q}\}$

(3) $S_3 = \left\{m + \frac{1}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}\right\}$

問 9. 次の集合はどのような集合か. 簡単に表せ.

(1) $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[1, 2-\frac{1}{n}\right]$ (2) $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[1, 1+\frac{1}{n}\right]$ (3) $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(1, 1+\frac{1}{n}\right)$ (4) $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right]$

問 10. 収束する数列は有界であることを示せ.

問 11. $\mathbb{R}$ の部分集合 $S \neq \emptyset$ に対して,

$$\sup S = \alpha \Rightarrow {}^{\exists}\{a_n\} \subset S \text{ s.t. } a_n \to \alpha$$

を示せ.

定義 (コーシー列)

数列 $\{a_n\}$ がコーシー列 $\overset{\text{def}}{\iff} a_n - a_m \to 0 \ (m, n \to \infty)$

$\iff {}^{\forall}\varepsilon > 0,\ {}^{\exists}N \in \mathbb{N};\ {}^{\forall}n, m \geq N,\ |a_n - a_m| < \varepsilon.$

問 12. 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{1 + a_n}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ と定義する. このとき,

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

であることを示せ.

2　連続関数

定義 (関数の収束・極限)

f を $\mathbb{R}$ 上 (実数値) の関数とする.

$$\lim_{x \to a} f(a) = \alpha \ \overset{\text{def}}{\iff} \ {}^{\forall}\varepsilon > 0,\ \delta > 0;\ |x - a| < \delta \implies |f(x) - \alpha| < \varepsilon.$$

問 13. 関数の極限は四則演算を保つ. すなわち, $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \alpha,\ \lim_{x \to a} g(x) = \beta$ とすると,

(a) $\displaystyle\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \alpha \pm \beta$

(b) $\displaystyle\lim_{x \to a} (f(x) g(x)) = \alpha\beta$

(c) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\alpha} \quad (f(x) \neq 0, \alpha \neq 0)$

が成り立つことを示せ.

問 14. 次の極限を求めよ. $a \in \mathbb{R}$ とする.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$　(2) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{[\sqrt{x}]}{\sqrt{[x]}}$　(3) $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$　(4) $\displaystyle\lim_{x \to 0} (1 + \sin x)^{1/x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x \to +0} x^a \log x$　(6) $\lim_{x \to +0} x^{\sin x}$

ただし, (2) の $[x]$ は x を超えない最大の整数とする.

問 15. $f(x)$ を開区間 (a, b) で定義された有界単調増加関数とするとき, $\displaystyle\lim_{x \to b-0} f(x)$ が存在することを示せ.

定義 (連続関数)

$f(x)$ を $x=a$ の近くで定義された関数とする.

- $f(x)$ が $x=a$ で**連続**
  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \iff {}^{\forall}\varepsilon>0,\ {}^{\exists}\delta>0;\ |x-a|<\delta \implies |f(x)-f(a)|<\varepsilon.$
- $f(x)$ が $x=a$ で**右連続**
  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \displaystyle\lim_{x\to a+} f(x)=f(a) \iff {}^{\forall}\varepsilon>0, {}^{\exists}\delta>0; 0<x-a<\delta \implies |f(x)-f(a)|<\varepsilon$. 左連続も同様に定義する.
- $f(x)$ が区間 I で連続
  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^{\forall}a\in I, {}^{\forall}\varepsilon>0, {}^{\exists}\delta>0; {}^{\forall}x\in I\ (|x-a|<\delta),\ |f(x)-f(a)|<\varepsilon.$

問 16. 関数 $f(x)=x^2$ は連続関数であることを連続関数の定義を用いてい示せ.

問 17. 関数 $f(x)$ は $x=a$ で連続であるとする. このとき,

$$
{}^{\forall}M>f(a),\ {}^{\exists}\delta>0;\ |{}^{\forall}x-a|<\delta,\ M>f(x)
$$

が成り立つことを示せ.

問 18. 次の $f(x)$ の連続性を調べよ.

(1) $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ (2) $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ (4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}(\text{既約分数表示で } q>0)\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$

問 19. $f(x)$ が $x=a$ で連続かつ $f(a)\neq 0$ ならば, a の十分近くの x に対し, $f(x)$ は $f(a)$ と同符号である.

問 20. 閉区間上の連続関数について (1) 中間値の定理 (2) 最大・最小値定理 を述べよ.

問 21. 閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 f が

$$
f([a,b])\subset[a,b]
$$

を満たすとき, $f(x)=x$ となる点 $x\in[a,b]$(不動点と呼ぶ) が存在することを示せ.

問 22. 関数 $f(x),g(x)$ がともに連続ならば,

$$
(f\vee g)(x):=\max\{f(x),g(x)\},\quad (f\wedge g)(x):=\min\{f(x),g(x)\}
$$

も連続であることを示せ.

問 23. 区間 I 上で関数 $f(x),g(x)$ がともに連続で, 各 $x\in\mathbb{Q}\cap I$ に対して $f(x)=g(x)$ ならば I 上で $f=g$ となることを示せ.

3　一様連続

定義 (一様連続)

$f(x)$ をある区間 $I \subset \mathbb{R}$ で定義された関数とする.

$f(x)$ が I で**一様連続** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^{\forall}\varepsilon > 0,\ {}^{\exists}\delta > 0;\ {}^{\forall}x, y \in I;\ |x-y| < \delta,\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

上の否定は

$$ {}^{\exists}\varepsilon > 0;\ {}^{\forall}\delta > 0,\ {}^{\exists}x, y \in I;\ |x-y| < \delta;\ |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon $$

である．これは, $|x_n - y_n| \to 0$ $(n \to \infty)$ となるが, 全ての n に対して $|f(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$ となるような数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ $({}^{\forall}n,\ x_n, y_n \in I)$ が存在するということである.

問 24. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ とする．$f(x)$ は次の区間において一様連続かどうかを判定せよ.

$$ (1)\ [1, \infty), \qquad (2)\ (0, 1] $$

問 25. $f(x) = \sin \dfrac{\pi}{x}$ は開区間 $(0, 1)$ で一様連続でないことを示せ.

問 26. $f(x)$ が $[a, b]$ で連続ならば, $[a, b]$ で一様連続であることを示せ.

問 27. $f(x)$ を区間 I 上の関数とする．また

$$ {}^{\exists}M > 0 \text{ s.t. } {}^{\forall}x, y \in I,\ |f(x) - f(y)| \leq M|x - y| $$

を仮定する．このとき, $f(x)$ は I で一様連続であることを示せ.

参考文献

[1] 小池 茂昭, 微分積分, 数学書房, 2010.
[2] 田島 一郎, 解析入門, 岩波全書, 1981.
[3] 難波 誠, 微分積分学, 裳華房, 1996.